

Licence 2^{ème} année, 2025-2026, TOPOLOGIE ET ANALYSE SUR \mathbb{R}^n

Interro 2, Groupe 3, lundi 13 avril 2026

Durée 24 minutes.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et les téléphones, même à titre d'horloge, sont également interdits.
Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (7pt)

Soit $f : (x, y) \mapsto \left(\cos(y), \frac{\sin(x)}{y} \right)$.

- Donner le domaine de définition naturel de f noté D_f .
- Dire si D_f est ouvert, fermé, les deux, ou aucun des deux.
- Montrer que $(0, 0)$ est adhérent à D_f .
- Etudier la limite de f en $(0, 0)$.

Correction.

La fonction f est définie sur $D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* (0.5pt)$. On a $D_f^c = \mathbb{R} \times \{0\}$ qui est un fermé par caractérisation séquentielle des fermés. Donc son complémentaire D_f est ouvert, qui ne peut être fermé puisque seul \emptyset et \mathbb{R}^2 sont à la fois ouvert et fermé (2pt).

$(0, 0)$ est adhérent à D_f par caractérisation séquentielle de l'adhérence puisque la suite $\left(\left(0, \frac{1}{n+1} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D_f satisfait $\left(0, \frac{1}{n+1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0) (1.5pt)$.

On conjecture que f n'admet pas de limite en $(0, 0)$ car sa seconde composante, notée $f_2 : (x, y) \in D_f \mapsto \frac{\sin(x)}{y}$, n'admet pas de limite en $(0, 0)$. En effet considérons $\gamma_1 : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto (t, t)$ et $\gamma_2 : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto (-t, t)$, dont les limites en 0 sont $(0, 0)$, qui satisfont pour tout $t > 0$, $f_2 \circ \gamma_1(t) = \frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$ et $f_2 \circ \gamma_2(t) = \frac{\sin(-t)}{t} = -\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} -1$, i.e. les limites sont différentes. Ainsi f_2 n'admet donc pas de limite en $(0, 0)$ et c'est donc aussi le cas de $f (3pt)$.

Compléments. Concernant le fait que D_f est un ouvert, le plus simple était de passer par le complémentaire et montrer qu'il est fermé. En effet, $D_f^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$ et pour toute suite u à valeurs dans D_f^c qui converge vers $\ell = (\ell_1, \ell_2)$, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n,2} = 0$, on a donc par passage à la limite $\ell_2 = 0$ d'où $\ell \in D_f^c$. Donc D_f^c est bien fermé par caractérisation séquentielle des fermés. Donc D_f est ouvert en tant que complémentaire d'un fermé.

On pouvait éventuellement directement montrer que D_f est un ouvert via la définition, mais c'est certainement moins agréable. Soit $(x, y) \in D_f$. Alors $y \neq 0$ et posons $r = |y| > 0$. Soit $(x', y') \in B((x, y), r)$, alors $|y' - y| \leq \|(x', y') - (x, y)\|_2 < r = |y|$. Ainsi $-|y| + y < y' < |y| + y$. Si $y > 0$, alors $-|y| + y = 0$ et donc $y' > 0$. Sinon $y < 0$ et $|y| + y = 0$, donc $y' < 0$. Dans tous les cas $y' \neq 0$ et donc $(x', y') \in D_f$. On a prouvé que $B((x, y), r) \subset D_f$, ce qui signifie par définition (caractérisation métrique des ouverts) que D_f est ouvert.

Enfin concernant la limite de f , on pouvait remarquer que $f_1 : (x, y) \in D_f \mapsto \cos(y)$ (l'application 1^{ère} coordonnée de f) admet 1 comme limite en $(0, 0)$. Il faut savoir le justifier. On a $f_1 = \cos \circ p_1$, donc p_1 qui tend vers 0 en $(0, 0)$ et \cos qui tend vers 1 en 0. Donc par composée de limite, on a $\lim_{(0,0)} f_1 = 1$. Cependant cette étude est inutile car on remarque que f_2 n'admet pas de limite en $(0, 0)$, et donc f ne peut admettre une limite en $(0, 0)$.

Exercice 2 (3pt)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles sur \mathbb{R}^2 . On suppose que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(y, x) = -2f(x, y)$. Montrer, en retournant à la définition des dérivées partielles via le taux d'accroissement, que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_y f(x, y) = -\frac{1}{2} \partial_x f(y, x).$$

Correction.

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $h \neq 0$, on a

$$\frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \frac{-\frac{1}{2}f(y+h, x) - (-\frac{1}{2}f(y, x))}{h} = -\frac{1}{2} \frac{f(y+h, x) - f(y, x)}{h}.$$

Comme f admet des dérivées partielles en (x, y) , on a

$$\frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \partial_y f(x, y),$$

et

$$-\frac{1}{2} \frac{f(y+h, x) - f(y, x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \partial_x f(y, x).$$

Donc par unicité de la limite, on obtient bien $\partial_y f(x, y) = -\frac{1}{2} \partial_x f(y, x)$.

Remarque post-correction : en fait cet exercice est un peu bancal puisque la seule fonction satisfaisant l'hypothèse de l'énoncé est la fonction nulle. Cela n'invalide pas la démonstration, ni la question posée, mais la conclusion obtenue est simplement $0 = 0$...