

Licence 2^{ème} année, 2025-2026, TOPOLOGIE ET ANALYSE SUR \mathbb{R}^n

Interro 2, Groupe 3, lundi 13 avril 2026

Durée 24 minutes.

*Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et les téléphones, même à titre d'horloge, sont également interdits.
Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.*

Exercice 1 (7pt)

Soit $f : (x, y) \mapsto \left(\cos(y), \frac{\sin(x)}{y} \right)$.

- Donner le domaine de définition naturel de f noté D_f .
- Dire si D_f est ouvert, fermé, les deux, ou aucun des deux.
- Montrer que $(0, 0)$ est adhérent à D_f .
- Etudier la limite de f en $(0, 0)$.

Exercice 2 (3pt)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles sur \mathbb{R}^2 . On suppose que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(y, x) = -2f(x, y)$. Montrer, en retournant à la définition des dérivées partielles via le taux d'accroissement, que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_y f(x, y) = -\frac{1}{2} \partial_x f(y, x).$$