

Licence 2^{ème} année, 2025-2026, TOPOLOGIE ET ANALYSE SUR \mathbb{R}^n

Interro 2, Groupe 1, mardi 14 avril 2026

Durée 24 minutes.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et les téléphones, même à titre d'horloge, sont également interdits. Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (6.5pt)

Soit $f : (x, y) \mapsto \left(x^3 \cos(y), \frac{x^2}{y-1}\right)$.

- Donner le domaine de définition naturel de f noté D_f .
- Montrer que D_f est ouvert.
- Montrer que $(0, 1)$ est adhérent à D_f .
- Etudier la limite de f en $(0, 1)$.

Correction.

La fonction f est définie sur $D_f = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{1\})$ (0.5pt). On a que $D_f^c = \mathbb{R} \times \{1\}$ est un fermé par caractérisation séquentielle des fermés puisque pour toute suite $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R} \times \{1\}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}^2$, la limite de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vaut nécessairement 1 donc $\ell \in \mathbb{R} \times \{1\}$. Ainsi D_f est ouvert en tant que complémentaire d'un fermé (2pt).

$(0, 1)$ est adhérent à D_f par caractérisation séquentielle de l'adhérence puisque la suite $\left(\left(0, 1 + \frac{1}{n+1}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D_f satisfait $\left(0, 1 + \frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 1)$ (1pt).

On conjecture que f n'admet pas de limite en $(0, 1)$ car sa seconde composante, notée $f_2 : (x, y) \in D_f \mapsto \frac{x^2}{y-1}$, n'admet pas de limite en $(0, 1)$. En effet considérons $\gamma_1 : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto (0, t+1)$ et $\gamma_2 : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto (t, t^2+1)$, dont les limites en 0 sont $(0, 0)$, qui satisfont pour tout $t > 0$, $f_2 \circ \gamma_1(t) = 0 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ et $f_2 \circ \gamma_2(t) = \frac{t^2}{t^2+1-1} = 1 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$, i.e. les limites sont différentes. Ainsi f_2 n'admet pas de limite en $(0, 1)$ et c'est donc aussi le cas de f (3pt).

Exercice 2 (4.5pt)

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} \sin(x)y, & \text{si } x \geq 0, \\ xy^2, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Étudier, en utilisant la définition via le taux d'accroissement, les dérivées partielles de f sur $\{0\} \times \mathbb{R}$ et les calculer si elles existent.

Correction.

Soit $(0, y_0) \in \{0\} \times \mathbb{R}$.

Dérivée partielle de f par rapport à la première variable. On a pour $t > 0$

$$\frac{f(0+t, y_0) - f(0, y_0)}{t} = y_0 \frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} y_0,$$

et pour $t < 0$

$$\frac{f(0+t, y_0) - f(0, y_0)}{t} = y_0^2 \frac{t}{t} = y_0^2 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} y_0^2. \quad (1.5pt)$$

Par conséquent $t \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{f(t, y_0) - f(0, y_0)}{t}$ admet une limite finie en 0 si et seulement si $y_0 = y_0^2$ i.e. $y_0 \in \{0, 1\}$. Ainsi f n'admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en $(0, y_0)$ que si $y_0 \in \{0, 1\}$ et dans ces cas $\partial_x f(0, 0) = 0$, $\partial_x f(0, 1) = 1$ (2pt).

Dérivée partielle de f par rapport à la deuxième variable. On a pour $t \neq 0$

$$\frac{f(0, y_0+t) - f(0, y_0)}{t} = 0 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0,$$

donc $\partial_y f(0, y_0) = 0$ (1pt).