

Licence 2^{ème} année, 2025-2026, TOPOLOGIE ET ANALYSE SUR \mathbb{R}^n

Interro 2, Groupe 1, mardi 14 avril 2026

Durée 24 minutes.

*Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et les téléphones, même à titre d'horloge, sont également interdits.
Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.*

Exercice 1 (6.5pt)

Soit $f : (x, y) \mapsto \left(x^3 \cos(y), \frac{x^2}{y-1}\right)$.

- Donner le domaine de définition naturel de f noté D_f .
- Montrer que D_f est ouvert.
- Montrer que $(0, 1)$ est adhérent à D_f .
- Étudier la limite de f en $(0, 1)$.

Exercice 2 (4.5pt)

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} \sin(x)y, & \text{si } x \geq 0, \\ xy^2, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Étudier, en utilisant la définition via le taux d'accroissement, les dérivées partielles de f sur $\{0\} \times \mathbb{R}$ et les calculer si elles existent.