

Licence 2^{ème} année, 2025-2026, TOPOLOGIE ET ANALYSE SUR $\mathbb{R}^n$

Interro 1, Groupe 3, lundi 16 février 2026

Durée 24 minutes ou 32 minutes pour 1/3 temps.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et les téléphones, même à titre d'horloge, sont également interdits. Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Résumé de ce qui n'a couramment pas pas fonctionné dans cette évaluation.

- Beaucoup de " $f(x)$ est une fonction".
- Des quantificateurs absents, variables non introduites, ou alors introduites inutilement (exemple : " f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$ ", ce qui s'écrit correctement " f est dérivable sur $\mathbb{R}$ ").
- Raisonnements à base de succession d'égalités sur des limites pour se prononcer sur l'existence de la première. C'est un contresens logique puisque on ne peut écrire $\lim_{x_0} f = \dots$ qu'après avoir bien montré que $\lim_{x_0} f$ existe. C'est en plus très dangereux (peut amener à faire des simplifications frauduleuses dans les limites).
- Le champs d'application de la formule de Taylor-Young n'est pas maîtrisé et le fait qu'une fonction admettant un DL_n , pour $n \geq 2$, en x_0 n'implique pas f n -fois dérivable en x_0 n'est pas connu (vu en TD et CM).
- Les DL des fonctions usuelles sont mal connus.

Exercice 1 (7pt)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f admet un DL_2 en 0 i.e.

$$f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2).$$

1. Exprimer, quand c'est possible, les constantes α, β, γ en fonction de f et ses éventuelles dérivées évaluées en 0.
2. On considère la fonction

$$g : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{f(2x) - f(x)}{x}.$$

- a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
- b) Montrer que g se prolonge par continuité en 0. On notera $\tilde{g}$ le prolongement.
- c) Montrer que $\tilde{g}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Correction.

1. Comme f admet un DL_2 en 0, par troncature f admet aussi un DL_1 en 0 qui s'écrit

$$f(x) = \alpha + \beta x + o_{x \rightarrow 0}(x),$$

ce qui implique que f est dérivable en 0 (on le savait déjà) et $\alpha = f(0)$, $\beta = f'(0)$ (1.25pt).

Si f était deux fois dérivable en 0, on aurait par unicité du DL_2 en 0 avec la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 que $\gamma = \frac{f''(0)}{2}$. Or on sait seulement que f est dérivable en 0 et qu'il existe des fonctions qui admettent un DL_2 en 0 sans qu'elles soient deux fois dérivable en 0. On ne peut donc pas, avec les informations à disposition, exprimer γ en fonction de f (0.75pt).

2. a) Par composée de fonctions dérivables, $x \mapsto f(2x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}^*$. Par différence de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}^*$, $x \mapsto f(2x) - f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, par produit g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (1pt).
- b) On a

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(2x) - f(x)}{x} = \frac{f(0) + f'(0)(2x) + \gamma(2x)^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) - (f(0) + f'(0)x + \gamma x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2))}{x}, \\ &= f'(0) + 3\gamma x + o_{x \rightarrow 0}(x). \end{aligned} \quad (1.25pt)$$

Ainsi $\lim_0 g = f'(0)$, donc g est prolongeable par continuité en 0 (0.75pt).

c) On a par définition que pour tout $x \neq 0$, $\tilde{g}(x) = g(x)$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et $\tilde{g}(0) = f'(0)$ (0.75pt).

En prolongeant le développement limité de g en 0, puisque $\tilde{g}(0) = f'(0)$, on a

$$\tilde{g}(x) = f'(0) + 3\gamma x + o_{x \rightarrow 0}(x).$$

Par conséquent $\tilde{g}$ admet un DL₁ en 0, donc $\tilde{g}$ est dérivable en 0 et $\tilde{g}'(0) = 3\gamma$ (1.25pt).

Autre méthode : par le taux d'accroissement. Soit $x \neq 0$, alors

$$\tau_{\tilde{g},0}(x) = \frac{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(0)}{x} = \frac{g(x) - f'(0)}{x} = 3\gamma + o_{x \rightarrow 0}(1).$$

Donc $\lim_0 \tau_{\tilde{g},0} = 3\gamma$, ainsi $\tilde{g}$ est dérivable en 0 et $\tilde{g}'(0) = 3\gamma$.

Exercice 2 (2.5pt)

Soit $f :]-\infty, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in]-\infty, \frac{\pi}{2}[$

$$f(x) = \begin{cases} \tan(x), & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \\ \cos(x) - 1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Étudier la dérivabilité de f en 0.

Correction.

Une grosse erreur a été faite dans l'énoncé initialement : la fonction $\tan$ n'est surtout pas définie sur $\mathbb{R}_+$!!! Classiquement on la définit sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et éventuellement on peut l'étendre par π -périodicité à $\mathbb{R}$ privés des valeurs $\pm \frac{\pi}{2}$ modulo π .

Cela ne change rien à l'objectif de l'exercice puisque l'enjeu était d'étudier le comportement de f au voisinage de 0.

On a $f(0) = 0$. Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a donc $\tau_{f,0}(x) = \frac{\tan(x)}{x}$. Or $\frac{\tan(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$, donc $\lim_{0^+} \tau_{f,0} = 1$ (0.75pt). Puis pour $x < 0$, on a $\tau_{f,0}(x) = \frac{\cos(x)-1}{x}$, or $\frac{\cos(x)-1}{x} = -\frac{x}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x)$, donc $\lim_{0^-} \tau_{f,0} = 0$ (0.75pt).

Les limites à gauche et à droite en 0 de $\tau_{f,0}$ sont différentes, donc $\tau_{f,0}$ n'admet pas de limite en 0 et donc f n'est pas dérivable en 0 (1pt).