

Licence 2^{ème} année, 2025-2026, TOPOLOGIE ET ANALYSE SUR $\mathbb{R}^n$

Interro 1, Groupe 3, lundi 16 février 2026

Durée 24 minutes ou 32 minutes pour 1/3 temps.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et les téléphones, même à titre d'horloge, sont également interdits.

Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (7pt)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f admet un DL_2 en 0 i.e.

$$f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2).$$

1. Exprimer, quand c'est possible, les constantes α, β, γ en fonction de f et ses éventuelles dérivées évaluées en 0.
2. On considère la fonction

$$g : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{f(2x) - f(x)}{x}.$$

- a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
- b) Montrer que g se prolonge par continuité en 0. On notera $\tilde{g}$ le prolongement.
- c) Montrer que $\tilde{g}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (2.5pt)

Soit $f :]-\infty, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in]-\infty, \frac{\pi}{2}[$

$$f(x) = \begin{cases} \tan(x), & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \\ \cos(x) - 1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Étudier la dérivabilité de f en 0.