

Licence 2^{ème} année, 2025-2026, TOPOLOGIE ET ANALYSE SUR $\mathbb{R}^n$

Interro 1, Groupe 1, mardi 17 février 2026

Durée 24 minutes ou 32 minutes pour 1/3 temps.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et les téléphones, même à titre d'horloge, sont également interdits. Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (1.5pt)

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $m > 0$ telles que

$$(1) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \mu \in [0, 1], \quad f(\mu x + (1 - \mu)y) \leq \mu f(x) + (1 - \mu)f(y) - \frac{m\mu(1 - \mu)}{2}(x - y)^2.$$

Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, tout $\lambda \in [0, 1]$, on a $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

Bonus (hors barème) : interpréter graphiquement la condition (1).

Correction.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$. En appliquant l'inégalité de l'assertion (1) satisfaite par f pour $\mu = 1 - \lambda$, qui appartient bien à $[0, 1]$, on obtient

$$\begin{aligned} f((1 - \lambda)x + (1 - (1 - \lambda))y) &\leq (1 - \lambda)f(x) + (1 - (1 - \lambda))f(y) - \frac{m(1 - \lambda)(1 - (1 - \lambda))}{2}(x - y)^2, \\ \Leftrightarrow f((1 - \lambda)x + \lambda y) &\leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) - \frac{m(1 - \lambda)\lambda}{2}(x - y)^2. \end{aligned}$$

Or $\frac{m(1 - \lambda)\lambda}{2}(x - y)^2 \geq 0$, donc $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$ (2pt).

Compléments. Lorsqu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait l'assertion (1), on dit qu'elle est m -fortement convexe sur $\mathbb{R}$. Une fonction fortement convexe est telle qu'il existe $m > 0$ la rendant m -fortement convexe. Cette exercice prouve donc qu'une fonction m -fortement convexe est convexe. La forte convexité renforce la convexité (d'où le nom...). Cette notion est très importante en optimisation, par exemple pour l'étude de la convergence de l'algorithme de descente de gradient !

Bonus. Nous avons vu en TD que la convexité de f s'interprète comme le fait que pour tous x, y , le graphe de f sur $[x, y]$ est en-dessous de la corde (ou segment) reliant les points $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$. Dit autrement, l'application $\mu \in [0, 1] \mapsto (\mu x + (1 - \lambda)y, \mu f(x) + (1 - \mu)f(y))$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, décrit le segment reliant $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$.

Pour l'assertion (1), la différence avec la convexité se situe dans l'ajout du terme $-\frac{m\mu(1 - \mu)}{2}(x - y)^2$ qui est de degré 2 en λ avec un coefficient dominant positif. Par conséquent cette fois l'application

$$\mu \in [0, 1] \mapsto \left(\mu x + (1 - \lambda)y, \mu f(x) + (1 - \mu)f(y) - \frac{m(1 - \lambda)(1 - (1 - \lambda))}{2}(x - y)^2 \right)$$

décrit une section de parabole convexe dont les extrémités sont les points $(x, f(x))$ (pour $\mu = 1$) et $(y, f(y))$ (pour $\mu = 0$). Pour tous x, y , le graphe de f doit donc être en dessous sur $[x, y]$ d'une section de parabole convexe. C'est une condition nettement plus restrictive que celle de la convexité. Par exemple la fonction valeur absolue, qui est convexe, n'est pas fortement convexe. (2pt)

Exercice 2 (4pt)

On donne à disposition l'énoncé du théorème des accroissements finis :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application où I est un intervalle contenant au moins deux points. On suppose que f est dérivable sur I .

Soit $T = \{(x, y) / x, y \in I, x < y\}$ et on pose $g : (x, y) \in T \mapsto \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$.

1. Prendre un exemple d'intervalle I et représenter T .
2. Montrer que $g(T) \subset f'(I)$.

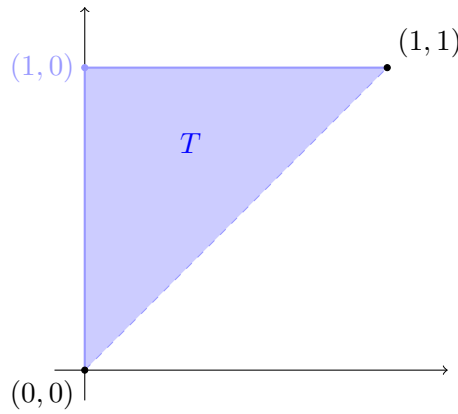


FIGURE 1. Représentation de l'ensemble T lorsque $I = [0, 1]$. La diagonale $\{(x, x) / x \in [0, 1]\}$ représentée avec des tirets n'appartient pas à l'ensemble T .

Correction.

1. Voir la figure 1 (1.5pt).

2. Soit $(x, y) \in T$, donc $x < y$ et $x, y \in I$. Comme I est un intervalle, on a $[x, y] \subset I$. Puisque f est dérivable sur I , f est donc continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ d'où il existe $c \in]x, y[\subset I$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ c'est-à-dire $g(x, y) = f'(c)$. On a $c \in I$, donc $g(x, y) \in f'(I)$ (2.5pt).

Exercice 3 (4.5pt)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dira que f est pseudo-dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ si la fonction

$$\sigma_{f,x_0} : h \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h},$$

admet une limite finie en 0 et on notera alors $f'_p(x_0)$ cette limite appelée la *pseudo-dérivée* de f en x_0 .

1. Montrer que si f est dérivable en x_0 , alors f est pseudo-dérivable en x_0 .

2. On considère la fonction $f :]-\infty, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in]-\infty, \frac{\pi}{2}[$

$$f(x) = \begin{cases} \tan(x), & \text{si } x \in]-\infty, \frac{\pi}{2}[\\ \cos(x) - 1, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

Montrer que f est pseudo-dérivable en 0.

Bonus (hors barème) : interpréter, pour cet exemple, la quantité $f'_p(0)$ par rapport au comportement de f à gauche et à droite de 0.

Correction.

1. Soit $h \neq 0$, on a

$$\sigma_{f,x_0}(h) = \frac{1}{2} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{1}{2} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} = \frac{1}{2} (\tau_{f,x_0}(x_0 + h) + \tau_{f,x_0}(x_0 - h)),$$

or $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_{f,x_0}(x_0 + h) = f'(x_0)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_{f,x_0}(x_0 - h) = f'(x_0)$ car f est dérivable en x_0 , d'où σ_{f,x_0} admet une limite finie (valant $f'(x_0)$) en 0 i.e. f est pseudo-différentiable en x_0 (2.5pt).

Alternativement on pouvait également écrire le DL₁ de f en x_0 (puisque f est dérivable en x_0) pour obtenir $\sigma_{f,x_0}(h) = f'(x_0) + o_{h \rightarrow 0}(1)$ et conclure.

2. Soit $h \in]-\infty, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$. On a

$$\sigma_{f,0}(h) = \frac{\tan(h) - \cos(h) + 1}{2h} = \frac{h + o_{h \rightarrow 0}(h) - 1 + o_{h \rightarrow 0}(h) + 1}{2h} = \frac{1}{2} + o_{h \rightarrow 0}(1),$$

donc $\lim_0 \sigma_{f,0} = \frac{1}{2}$. La fonction f est pseudo-dérivable en 0 et $f'_p(0) = \frac{1}{2}$ (2pt).

Rappel. On a $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$ et $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$.

Bonus. On peut montrer que f n'est pas dérivable en 0 (voir l'interro 1 du groupe 3). Cependant f est dérivable à gauche et à droite en 0 et on a $f'_g(0) = 0$ et $f'_d(0) = 1$. On remarque alors que $f'_p(0) = \frac{f'_g(0) + f'_d(0)}{2}$ (2pt).

C'est un fait général que l'on peut prouver. Si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et pseudo-dérivable en x_0 , alors $f'_p(0) = \frac{f'_g(0) + f'_d(0)}{2}$. Le faire en exercice !