

Licence 2^{ème} année, 2025-2026, TOPOLOGIE ET ANALYSE SUR $\mathbb{R}^n$

Interro 1, Groupe 1, mardi 17 février 2026

Durée 24 minutes ou 32 minutes pour 1/3 temps.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et les téléphones, même à titre d'horloge, sont également interdits.

Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (1.5pt)

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $m > 0$ telles que

$$(1) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \mu \in [0, 1], \quad f(\mu x + (1 - \mu)y) \leq \mu f(x) + (1 - \mu)f(y) - \frac{m\mu(1 - \mu)}{2}(x - y)^2.$$

Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, tout $\lambda \in [0, 1]$, on a $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

Bonus (hors barème) : interpréter graphiquement la condition (1).

Exercice 2 (4pt)

On donne à disposition l'énoncé du théorème des accroissements finis :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application où I est un intervalle contenant au moins deux points. On suppose que f est dérivable sur I .

Soit $T = \{(x, y) / x, y \in I, x < y\}$ et on pose $g : (x, y) \in T \mapsto \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$.

1. Prendre un exemple d'intervalle I et représenter T .
2. Montrer que $g(T) \subset f'(I)$.

Exercice 3 (4.5pt)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dira que f est pseudo-dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ si la fonction

$$\sigma_{f, x_0} : h \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h},$$

admet une limite finie en 0 et on notera alors $f'_p(x_0)$ cette limite appelée la pseudo-dérivée de f en x_0 .

1. Montrer que si f est dérivable en x_0 , alors f est pseudo-dérivable en x_0 .
2. On considère la fonction $f :]-\infty, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in]-\infty, \frac{\pi}{2}[$

$$f(x) = \begin{cases} \tan(x), & \text{si } x \in]-\infty, \frac{\pi}{2}[\\ \cos(x) - 1, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

Montrer que f est pseudo-dérivable en 0.

Bonus (hors barème) : interpréter, pour cet exemple, la quantité $f'_p(0)$ par rapport au comportement de f à gauche et à droite de 0.