Nom :
Prénom :
No étudiant :

Université Paris Cité
L1 Mathématiques et Informatique
2023-2024

MC2 - Groupe 3 - Interro n°4

Durée 25min. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.
Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (4.75pt)

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\sum \sin\left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right) \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

2. $\sum \frac{\cos(n)e^n}{(2n)!}$.

Correction.
4.75 = 2 + 2.75

1. La quantité $u_n = \sin\left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right) > 0$ car $\frac{1}{1+\sqrt{n}} \in [0,1] \subset [0,\pi]$. Ainsi la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est à termes positifs (0.75pt).

On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1+\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ (0.5pt).

> Complément post-correction sur ce calcul de DL. On a $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, or $\frac{1}{1+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, donc $\sin\left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ et $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge par le critère de Riemann ($\alpha = 1 \leqslant 1$), donc par le critère d'équivalence $\sum u_n$ diverge également (0.75pt).

2. La quantité $u_n = \frac{\cos(n)e^n}{(2n)!}$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais n'est pas de signe constante (0.25pt).

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant \frac{e^n}{(2n)!}$ (0.5pt). Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{e^n}{(2n)!}$ qui est à termes positifs.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e^{n+1}(2n)!}{(2(n+1))!e^n} = \frac{e(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} = \frac{e(2n)!}{(2n+2)(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1 \ (0.75pt).$$

Ainsi par le critère de d'Alembert, $\sum v_n$ converge (0.5pt). Donc par le critère de majoration, $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente (0.75pt).

Exercice 2 (5.75pt)

Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$(E) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)y'(x) - xy(x) = (1+x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Correction.
5.75 = 1.75 + 3.5 + 0.5

Résolution de l'équation homogène. L'équation homogène normalisée est

$$(E_0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) - \frac{x}{1+x^2}y(x) = 0. \ (0.5pt)$$

Une primitive de la fonction continue sur $\mathbb{R}$: $\alpha : x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{x}{1+x^2}$ est $A : x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ (0.5pt).
Ainsi l'ensemble des solutions de (E_0) est l'ensemble

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mapsto \underbrace{Ce^{-\left(-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)}}_{=C\sqrt{1+x^2}} \;/\; C \in \mathbb{R} \right\}. \ (0.75pt)$$

Recherche d'une solution particulière. L'équation différentielle linéaire d'ordre 1 (E) n'étant pas à coefficients constants, on utilise la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p : x \in \mathbb{R} \mapsto C(x)\sqrt{1+x^2}$ avec $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à déterminer (1pt). On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_p'(x) = C'(x)\sqrt{1+x^2} + C(x)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. On injecte y_p dans (E). On a

$$\begin{aligned}
& y_p \text{ solution de } (E), \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)y_p'(x) - xy_p'(x) = (1+x^2)^{\frac{3}{2}}, \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R}, \quad C'(x)(1+x^2)\sqrt{1+x^2} + C(x)x\sqrt{1+x^2} - xC(x)\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{3}{2}}, \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R}, \quad C'(x) = 1.
\end{aligned}$$

Or $C : x \in \mathbb{R} \mapsto x$ est une primitive de $x \in \mathbb{R} \mapsto 1$, donc $y_p : x \in \mathbb{R} \mapsto x\sqrt{1+x^2}$ est une solution particulière de (E) (2.5pt).

Conclusion. L'ensemble des solutions de (E) est donc

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mapsto (x+C)\sqrt{1+x^2} \,/\, C \in \mathbb{R} \right\}. \; (0.5pt)$$