Université Paris Cité,
UFR de Mathématiques et Informatique.

MC2 - Groupe 3 - Interro n°3

Durée 27min ou 36 min pour les tiers temps. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (5.5pt)

On considère la fonction $f : t \mapsto \frac{9}{e^{2t}-3e^t}$. Donner une primitive de f sur son ensemble de définition.

Correction.
On a f définie en $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$e^{2t} - 3e^t \neq 0 \Leftrightarrow e^t(e^t - 3) \neq 0 \Leftrightarrow e^t - 3 \neq 0 \Leftrightarrow t \neq \ln(3).$$

Ainsi f est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\ln(3)\}$ et est continue sur D_f. Donc f admet des primitives sur D_f. Soit $x_0 \in D_f$ et $x \in D_f$ tels que $[x_0, x] \subset D_f$. Calculons $\int_{x_0}^x f(t)dt$ qui est donc bien définie (1pt).

Effectuons le changement de variable $u = e^t$, alors $du = e^t dt$ d'où $dt = \frac{du}{u}$. Les bornes x_0, x deviennent e^{x_0} et e^x et par la formule du changement de variable on a

$$\int_{x_0}^x f(t)dt = \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{9}{u(u-3)} \frac{1}{u} du = \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{9}{u^2(u-3)} du. \ (1.5pt)$$

Par la formule de la décomposition en éléments simples, il existe $a_0, a_1, b_0 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$

$$\frac{9}{u^2(u-3)} = \frac{a_0}{u} + \frac{a_1}{u^2} + \frac{b_0}{u-3}. \ (0.5pt) \tag{1}$$

On effectue les opérations suivantes :

— on multiplie (1) par u^2 et on fait $u \to 0$, on obtient $a_1 = -3$,

— on multiplie (1) par $u - 3$ et on fait $u \to 3$, on obtient $b_0 = 1$,

— on évalue (1) en $u = 1$ et on obtient $-\frac{9}{2} = a_0 + a_1 - \frac{b_0}{2}$, soit $a_0 = -1$.

1.5pt pour le calcul des coefficients de la DES.

On a donc

$$\int_{x_0}^x f(t)dt = \int_{e^{x_0}}^{e^x} \left(-\frac{1}{u} - 3\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u-3}\right) du = [-\ln(|u|)]_{e^{x_0}}^{e^x} + \left[\frac{3}{u}\right]_{e^{x_0}}^{e^x} + [\ln(|u-3|)]_{e^{x_0}}^{e^x},$$
$$= -x + 3e^{-x} + \ln(|e^x - 3|) + cste.$$

Ainsi $G : x \in D_f \mapsto -x + 3e^{-x} + \ln(|e^x - 3|)$ est une primitive de f sur D_f (1pt).

Exercice 2 (6.5pt)

Étudier la nature des intégrales impropres suivantes.

1. $\int_0^1 \frac{1}{\sin(t^2)} dt$.

2. $\int_1^{+\infty} \ln(t^3) \arctan\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right) dt$.

($\star$) Bonus. Donner la nature de $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sin(\pi t^2)} dt$.

Correction.
6.5 = 2.5 + 4

1. Soit $f : t \mapsto \frac{1}{\sin(t^2)}$. La fonction f est définie sur $]0, 1]$ et est continue sur $]0, 1]$ comme composée de fonctions continues sur leurs ensembles de définition. De plus comme sin est strictement positive sur $]0, \pi[$ et $]0, 1] \subset]0, \pi[$, la fonction f est positive sur $]0, 1]$ (0.75pt).

On a $f(t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{t^2}$ (0.5pt). Or $\int_0^1 \frac{1}{t^2} dt$ est divergente par le critère de Riemann ($\alpha = 2 \geqslant 1$) (0.5pt) et comme $\int_0^1 \frac{1}{\sin(t^2)} dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^2} dt$ ont même nature par le critère d'équivalence (0.5pt), on obtient que $\int_0^1 \frac{1}{\sin(t^2)} dt$ est divergente (0.25pt).

2. Soit $f : t \mapsto \ln(t^3)\arctan\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right)$. La fonction f est définie et continue sur $[1,+\infty[$ comme composée de fonctions continues sur leurs ensembles de définition. De plus, les fonctions ln et arctan étant positives sur $[1,+\infty[$, on déduit que f est positive sur $[1,+\infty[$ (0.75pt).

On a pour tout $t \geqslant 1$, $f(t) = 3\ln(t)\arctan\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} 3\ln(t)\frac{1}{t\sqrt{t}}$ (0.75pt). Posons $g : t \in [1,+\infty[\mapsto \frac{3\ln(t)}{t\sqrt{t}}$ qui est continue positive sur $[1,+\infty[$. Ainsi par le critère d'équivalence, on a que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ sont de même nature (0.5pt).

On a pour tout $t \geqslant 1$, $t^{\frac{5}{4}}g(t) = \frac{3\ln(t)}{t^{\frac{1}{4}}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée. Donc il existe $T \geqslant 1$ tel que pour tout $t \geqslant T$, on a $g(t) \leqslant \frac{1}{t^{\frac{5}{4}}}$ (1pt). Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{5}{4}}}dt$ est convergente par critère de Riemann ($\alpha = \frac{5}{4} > 1$), donc par le critère de majoration $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ est convergente et finalement $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente (1pt).

($\star$) Bonus. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sin(\pi t^2)}$ est définie et continue sur $[\frac{1}{2},1[$. Comme pour tout $t \in [\frac{1}{2},1[$, on a $\pi t^2 \in [\frac{\pi}{4},\pi[$, f est donc strictement positive sur $[\frac{1}{2},1[$. La borne impropre est en 1, on se ramène à une borne impropre en 0 en faisant un changement de variable.

> Attention : pas de changement de variable directement sur l'intégrale impropre !

Soit $X \in [\frac{1}{2},1[$. Considérons $\int_{\frac{1}{2}}^X f(t)dt$. On fait le changement de variable $u = 1-t$ donc $du = -dt$ et les bornes $\frac{1}{2}, X$ deviennent $\frac{1}{2}, 1-X$. Par la formule du changement de variable, on a donc

$$\int_{\frac{1}{2}}^X f(t)dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1-X} \frac{1}{\sin(\pi(1-u)^2)}(-du) = \int_{1-X}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sin(\pi u^2 - 2\pi u + \pi)}du.$$

Or pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$, donc pour tout $u \in [1-X, \frac{1}{2}]$, $\sin(\pi u^2 - 2\pi u + \pi) = \sin(2\pi u - \pi u^2)$, donc finalement

$$\int_{\frac{1}{2}}^X f(t)dt = \int_{1-X}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sin(2\pi u - \pi u^2)}du.$$

Ainsi $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt$ est convergente si et seulement si $\lim_{X\to1}\int_{\frac{1}{2}}^X f(t)dt$ existe et est finie, donc si et seulement si (par le calcul précédent) $\lim_{X\to1}\int_{1-X}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sin(2\pi u-\pi u^2)}du$ existe et est finie, c'est-à-dire si et seulement si $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sin(2\pi u-\pi u^2)}du$ est convergente. On s'est bien ramené à une intégrale impropre avec une borne impropre en 0 au lieu de 1.

Étudions donc la nature de $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sin(2\pi u-\pi u^2)}du$. Soit $g : u \mapsto \frac{1}{\sin(2\pi u-\pi u^2)}$. C'est une fonction définie continue sur $]0,\frac{1}{2}]$ et positive (le changement de variable n'a pas affecté cette propriété de f, sinon cela se vérifie à la main). On a $\sin(v) \underset{v\to0}{\sim} v$, or ici $2\pi u - \pi u^2 \to 0$ quand $u \to 0$, donc $\sin(2\pi u - \pi u^2) \underset{u\to0}{\sim} 2\pi u - \pi u^2 \underset{u\to0}{\sim} 2\pi u$.

> Attention à ce dernier équivalent, on a bien $2\pi u - \pi u^2 \underset{u\to0}{\sim} 2\pi u$ car $u \to 0$, et non $2\pi u - \pi u^2 \underset{u\to0}{\sim} -\pi u^2$. S'il faut s'en convaincre, faire comme d'habitude le quotient et vérifier qu'il tend vers 1.

Ainsi $g(u) \underset{u\to0}{\sim} \frac{1}{2\pi u}$. Par le critère de Riemann $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\pi u}du$ est divergente (car $\alpha = 1 \geqslant 1$), donc par le critère d'équivalence $\int_0^{\frac{1}{2}} g(u)du$ est divergente. Et donc $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt$ est divergente.