Université Paris Cité,
UFR de Mathématiques et Informatique.

MC2 - Groupe 3 - Interro n°2

Durée 27min ou 36 min pour les tiers temps. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (3pt)

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On considère le système d'équations linéaires suivant

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} x + y + z + t = 1, \\ x - y + z + t = 2, \\ x + y - z + t = 3, \\ x + y + z - t = 4. \end{cases}$$

Montrer que $(\mathcal{S})$ admet une unique solution. *Indication : on ne cherchera pas à résoudre le système.*

Correction.
Posons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Alors $(\mathcal{S})$ se réécrit $AX = b$ et il admet une unique solution si et seulement si $\det(A) \neq 0$ (0.5pt). Or

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \ (1.5pt)$$

$$\underset{C_4 \leftarrow C_4 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8,$$

où l'avant dernière égalité est obtenue grâce au fait que la déterminant d'une matrice triangulaire inférieure est le produit des termes diagonaux (0.75pt). Ainsi $\det(A) \neq 0$, donc $(\mathcal{S})$ admet bien une unique solution (0.25pt).

Exercice 2 (4pt)

On définit P_1, P_2 deux plans telles que

$$P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, / \, -x + y - 2z = 0\} \text{ et } P_2 = \mathrm{Vect}\left((0, 1, 0), (-1, -1, -1)\right).$$

Donner une ~~équation~~ représentation cartésienne et une ~~équation~~ représentation paramétrique de la droite $D = P_1 \cap P_2$.

Correction.
Notons $u_2 = (0, 1, 0)$ et $v_2 = (-1, -1, -1)$, alors un vecteur orthogonal à P_2 est $w_2 = u_2 \wedge v_2 = (-1, 0, 1)$ (1pt). Ainsi pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$(x, y, z) \in P_2 \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) \perp (-1, 0, 1) \quad \Leftrightarrow \quad \langle (x, y, z), (-1, 0, 1) \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x + z = 0,$$

Donc une représentation de P_2 est donnée par $P_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, / \, -x + z = 0\}$ et donc une représentation cartésienne de $D = P_1 \cap P_2$ est $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, / \, -x + y - 2z = 0 \text{ et } -x + z = 0\}$ (1.5pt).

Vue la représentation cartésienne définissant P_1, un vecteur orthogonal à P_1 est $w_1 = (-1, 1, -2)$ (0.5pt). Donc un vecteur de D est $w_1 \wedge w_2 = (1, 3, 1)$ (0.75pt). Donc une représentation paramétrique de D est $D = \{\lambda(1, 3, 1) \, / \, \lambda \in \mathbb{R}\}$ (0.25pt).

J'ai remplacé dans l'énoncé et la correction le mot "équation" par le mot "représentation" qui est plus précis et approprié à l'usage qui en a été ici.

Rappel sur la notion d'espace vectoriel engendré. $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par la famille $\mathcal{F}$. C'est l'ensemble des combinaisons linéaires formées à partir des vecteurs de $\mathcal{F}$. Donc par exemple pour les vecteurs $u_2 = (0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ et $v_2 = (-1, -1, -1) \in \mathbb{R}^3$, $P_2 = \mathrm{Vect}(u_2, v_2)$ est le sous espace vectoriel engendré par u_2 et v_2, d'où $P_2 = \{\lambda u_2 + \mu v_2 \,/\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. En particulier, on a $u_2 \in P_2$ (pour le choix $\lambda = 1$ et $\mu = 0$) et $v_2 \in P_2$ (pour le choix $\lambda = 0$ et $\mu = 1$). Les vecteurs u_2 et v_2 formant une famille libre (se vérifie rapidement en utilisant la définition de famille libre (exercice !)), P_2 est donc un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. C'est bien un plan ! Le vecteur w_2 qui est orthogonal (perpendiculaire) aux vecteurs u_2 et v_2 est donc perpendiculaire à tout vecteur de P_2 puisque P_2 est engendré par u_2 et v_2. En effet soit $u \in P_2$ alors par définition il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda u_2 + \mu v_2$ (u est une certaine combinaison linéaire des vecteurs u_2 et v_2), et alors $\langle w_2, u\rangle = \lambda \underbrace{\langle w_2, u_2\rangle}_{=0} + \mu \underbrace{\langle w_2, v_2\rangle}_{=0} = 0$.

Retour sur la notion d'équation cartésienne d'un plan et d'une droite. Considérons l'ensemble $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, ax+by+cz = 0\}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ des nombres réels fixés (ils caractérisent l'ensemble P, en changeant a, b, c on change P). On peut montrer qu'un tel ensemble P est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (exercice !). Si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ alors tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ satisfait l'équation $ax + by + cz = 0$ (puisque $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$), d'où $P = \mathbb{R}^3$. Supposons maintenant que $(a, b, c) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors au moins l'un des réels a, b ou c est non nul. Pour fixer les idées, on va supposer que $a \neq 0$. Alors pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in P \quad &\Leftrightarrow \quad ax + by + cz = 0 \underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z,\\ &\Leftrightarrow \quad (x, y, z) = \left(-\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z, y, z\right),\\ &\Leftrightarrow \quad (x, y, z) = y\left(-\frac{b}{a}, 1, 0\right) + z\left(-\frac{c}{a}, 0, 1\right)\end{aligned}$$

On a donc montré que $P = \left\{y\left(-\frac{b}{a}, 1, 0\right) + z\left(-\frac{c}{a}, 0, 1\right) \,/\, y, z \in \mathbb{R}^3\right\}$ c'est-à-dire $P = \mathrm{Vect}\left(\left(-\frac{b}{a}, 1, 0\right), \left(-\frac{c}{a}, 0, 1\right)\right)$ (ce qui en particulier montre que P est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ par définition de Vect). Les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\left(-\frac{b}{a}, 1, 0\right)$ et $\left(-\frac{c}{a}, 0, 1\right)$ formant un famille libre (exercice !) et engendrant P, ils forment une base de P et donc P est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Les deux autres situations possibles $b \neq 0$ et $c \neq 0$ se traitant de la même manière (exercice !), nous venons de montrer qu'un sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ définie via une équation cartésienne (non triviale, i.e. avec $(a, b, c) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$) est un plan de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un sev de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.

En résumé :

- un ensemble de vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ caractérisé par *une* équation du type : $ax + by + cz = 0$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, est un plan (vectoriel). C'est un sev de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2,
- un ensemble de vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ caractérisé par *deux* équations du type : $ax+by+cz = 0$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, et $a'x+b'y+c'z = 0$, avec $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$ est une droite (vectorielle) si (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas colinéaires. En effet à cause du "et" et le fait les deux équations définissent des plans non confondus, l'ensemble résultant est donc l'intersection de deux plans distincts, donc est une droite. C'est un sev de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1.

Exercice 3 (3pt)
Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{1}{1-5n} + \frac{1}{2-5n} + \ldots + \frac{1}{n-5n}.$$

Déterminer la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

($\star$) Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de

$$T_n = \sum_{k=2}^{2n-1} \frac{1}{k-5n}.$$

Correction.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-5n}, \text{ (0.25}pt) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{k}{n}-5}, \text{ (0.5}pt) \end{aligned}$$

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t-5}$ est définie sur $[0, 1]$ et ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ i.e. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la somme de Riemann de f (0.5pt). Comme f est continue sur $[0, 1]$ (0.25pt), $\int_0^1 f(t)dt$ est bien définie et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ (0.5pt).

Enfin

$$\int_0^1 f(t)dt = [\ln(|t-5|)]_0^1 = \ln(4) - \ln(5). \text{ (1}pt)$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln(4) - \ln(5)$.

> Quelques commentaires sur la primitivation de f. La fonction f est définie sur $[0, 1]$, mais aussi plus globalement sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$. Elle est continue sur $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$ comme fraction rationnelle définie sur cet ensemble. La fonction f admet donc des primitives sur son ensemble de définition D ! Une primitive de f sur D est la fonction $F : t \in D \mapsto \ln(|t-5|)$. Il ne faut surtout pas oublier la valeur absolue car pour tout $t < 5$, $t-5 < 0$ et donc $\ln(t-5)$ n'est pas défini.
>
> On peut se convaincre par un calcul que F est bien une primitive de f sur D. Il s'agit de montrer, par définition, que pour tout $t \in D =]-\infty, 5[\cup]5, +\infty[$, $F'(t) = f(t)$.
>
> — Pour tout $t > 5$, $F(t) = \ln(t-5)$ (car $t-5 > 0$ donc $|t-5| = t-5$). Or par composée de fonctions dérivables (la fonction ln l'étant sur $\mathbb{R}_+^*$), F est donc bien dérivable sur $]5, +\infty[$ et pour tout $t > 5$, $F'(t) = \frac{1}{t-5} = f(t)$.
>
> — Pour tout $t < 5$, $F(t) = \ln(-t+5)$ (car $t-5 < 0$ donc $|t-5| = -(t-5) = -t+5$). De nouveau la fonction F est dérivable sur $]-\infty, 5[$ (même raison qu'au dessus), et pour tout $t < 5$, $F'(t) = \frac{-1}{-t+5} = \frac{1}{t-5} = f(t)$.
>
> A retenir : si vous avez une fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t-a}$ avec $a \in \mathbb{R}$ à primitiver, alors cette fonction admet bien des primitives sur son domaine de définition $D_f = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ en tant que fonction continue et une primitive sur D_f est $t \in D_f \mapsto \ln(|t-a|)$ (on n'oublie pas la valeur absolue !).

Correction de $(\star)$. Traité comme bonus de 3pt.

> T_n ressemble à une somme de Riemann, mais elle n'a pas la forme attendue. On va effectuer diverses opérations sur T_n pour réussir à retomber sur la formulation appropriée. On remarque que T_n est composée de $2n-2$ termes, donc presque $2n$ termes. On remarque aussi au dénominateur que l'on va pouvoir facilement factoriser par $2n$ et le dénominateur sera alors une fonction du rapport $\frac{k}{2n}$. L'idée est donc d'écrire T_n comme une somme à $2n$ termes, puis écrire le terme général de la somme comme une fonction de $\frac{k}{2n}$, pour finalement réussir à interpréter le résultat comme une somme de Riemann.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

(1) $$T_n = \sum_{k=2}^{2n-1} \frac{1}{k-5n} = \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k-5n}\right) - \frac{1}{1-5n} - \frac{1}{2n-5n},$$

comme on a ajouté les termes $k = 1$ et $k = 2n$ à la somme, on les retranche pour maintenir l'égalité. Concentrons-nous sur la quantité $U_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k-5n}$. On a

$$U_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\frac{k}{2n} - \frac{5}{2}},$$

Posons $g : t \mapsto \frac{1}{t-\frac{5}{2}}$, c'est une fonction définie sur $[0,1]$ et on a donc montré que $U_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} g\left(\frac{k}{2n}\right)$. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une somme de Riemann de g sur $[0,1]$ et comme g est continue sur $[0,1]$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \displaystyle\int_0^1 g(t)dt$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = U_n - \frac{1}{1-5n} - \frac{1}{3n}$, on a donc également $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \displaystyle\int_0^1 g(t)dt$ par sommation de limites (la suite $\left(-\frac{1}{1-5n} - \frac{1}{3n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0).

Enfin

$$\int_0^1 g(t)dt = \left[\ln\left(\left|t-\frac{5}{2}\right|\right)\right]_0^1 = \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln\left(\frac{5}{2}\right) = \ln(3) - \ln(5).$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \ln(3) - \ln(5)$.

> Notez que dans le calcul de T_n, équation (1), on aurait pu alternativement se ramener à une somme de 0 à $2n-1$:
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = \left(\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{k-5n}\right) - \frac{1}{0-5n} - \frac{1}{1-5n},$$
>
> et conclure de même ensuite que c'est une somme de Riemann de f sur $[0,1]$ (correspondant cette fois à une méthode des rectangles à gauche).