Nom :
Prénom :
No étudiant :

Université Paris Cité
L1 Mathématiques et Informatique
2023-2024

MC2 - Groupe 3 - Interro n°1

Durée 30mn. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.
Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (5pt)

On considère $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ telle que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = X^2P'' - XP(1).$$

1. Rappeler la définition de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que f est un endomorphisme.
3. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.
4. Déterminer si f est un isomorphisme.

Correction.
$5 = 0.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5$

1. La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $(1, X, X^2)$ (0.5pt).
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= X^2(\lambda P + Q)'' - X(\lambda P + Q)(1) = \lambda X^2P'' + X^2Q'' - \lambda XP(1) - XQ(1), \\ &= \lambda(X^2P'' - XP(1)) + (X^2Q'' - XQ(1)) = \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

D'où f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$, i.e. f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ (1.5pt).

3. On a $f(1) = -X = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot X + 0 \cdot X^2$, $f(X) = -X = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot X + 0 \cdot X^2$ et $f(X^2) = 2X^2 - X = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot X + 2 \cdot X^2$, donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \ (1.5pt)$$

4. Comme les dimensions de l'espace de départ et d'arrivée de f sont égales (valant 3) et f linéaire, f est un isomorphisme si et seulement si f est injective. Et f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$ [1]. Or on a $f(1) = f(X)$, donc par linéarité de f, on a $f(X - 1) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. D'où $X - 1 \in \ker(f)$, i.e. $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$. Ainsi f n'est pas un isomorphisme (1.5pt).

Autre méthode ne se basant pas sur l'observation que $f(1) = f(X)$.
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, donc il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P = a + bX + cX^2$. Ainsi $f(P) = X^2(2c) - X(a + b + c) = -(a + b + c)X + 2cX^2$. Par conséquent

$$\begin{aligned} P \in \ker(f) \quad &\Leftrightarrow \quad f(P) = 0, \\ &\Leftrightarrow \quad -(a + b + c)X + 2cX^2 = 0, \\ &\Leftrightarrow \quad a + b + c = 0 \text{ et } 2c = 0, \\ &\Leftrightarrow \quad a = -b \text{ et } c = 0, \end{aligned}$$

l'avant dernière équivalence étant vraie puisque (X, X^2) forme une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$. Ainsi $\ker(f) = \{bX - b \,/\, b \in \mathbb{R}\} = \{b(X - 1) \,/\, b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X - 1)$. Le noyau de f n'est donc pas réduit à $\{0\}$, donc f n'est pas injective et donc f n'est pas un isomorphisme.

> Notez que le résultat obtenu via cette seconde méthode est bien en cohérence avec le résultat obtenu initialement, à savoir que $X - 1 \in \ker(f)$. Ouf ! Mais dans cette seconde méthode on a fait mieux en montrant que $\ker(f)$ ne contient en fait que les polynômes proportionnels à $X - 1$ (i.e. en particulier est un sev de dimension 1 de $\mathbb{R}_2[X]$). Ce n'était bien sûr pas nécessaire pour obtenir que f n'est pas injective, puisqu'il suffisait d'obtenir que $\ker(f) \neq \{0\}$.

Exercice 2 (7pt)

On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y - z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\}$.

1. Rappeler la définition de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1. Cette dernière équivalence est toujours vraie (bien sûr lorsque l'application est linéaire, sinon la notion de noyau n'est même pas définie).

3. Trouver une base de F. Quelle est la dimension de F ?

4. On pose $u = (1, 1, -1)$, $v = (2, -1, 0)$ et $w = (1, 2, 3)$. Par un calcul de déterminant montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Correction.
$7 = 0.5 + 3 + 1.75 + 1.75$

1. La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est (e_1, e_2, e_3) où $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ (0.5pt).

2. 0.75pt pour la présence des 3 axiomes

   — On a $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$ appartient à F car $0_{\mathbb{R}^3}$ satisfait les deux équations définissant F (0.25pt).

   — Soit $u = (x, y, z) \in F$ et $v = (x', y', z') \in F$. Alors $u + v = (x + x', y + y', z + z')$.
   On a $(x + x') + (y + y') - (z + z') = (x + y - z) + (x' + y' - z')$. Or $x + y - z = 0$ car $u \in F$ et $x' + y' - z' = 0$ car $v \in F$. D'où $(x + x') + (y + y') - (z + z') = 0$.
   Puis $2(x + x') - (y + y') = (2x - y) + (2x' - y')$. Or $2x - y = 0$ car $u \in F$ et $2x' - y' = 0$ car $v \in F$. D'où $2(x + x') - (y + y') = 0$.
   Ainsi les coordonnées de $u + v$ satisfont les deux équations définissant F, d'où $u + v \in F$ (1.25pt).

   — Soit $u = (x, y, z) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda u = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$. On a $\lambda x + \lambda y - \lambda z = \lambda(x + y - z) = 0$ car $u \in F$. Puis $2(\lambda x) - \lambda y = \lambda(2x - y) = 0$ car $u \in F$. Donc les coordonnées de λu satisfont les équations définissant F, ainsi $\lambda u \in F$ (0.75pt).

   On a bien montré que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} u = (x, y, z) \in F \quad &\Leftrightarrow \quad z = x + y \text{ et } y = 2x, \\ &\Leftrightarrow \quad z = 3x \text{ et } y = 2x, \\ &\Leftrightarrow \quad u = (x, 2x, 3x), \\ &\Leftrightarrow \quad u = x(1, 2, 3). \end{aligned}$$

Ainsi $F = \text{Vect}((1, 2, 3))$. La famille $((1, 2, 3))$ est libre car ne contient qu'un vecteur. Ainsi $((1, 2, 3))$ est une base de F (1.5pt). Cette base de F ne contient qu'un vecteur, donc $\dim(F) = 1$ (0.25pt).

4. La famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\det(u, v, w) \neq 0$ (0.25pt). Or

$$\det(u, v, w) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\underset{\text{dév. 1ère colonne}}{=} (-1)^{3+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -14 \neq 0.$$

Ainsi (u, v, w) est bien une base de $\mathbb{R}^3$ (1.5pt).