Université Paris Cité,
UFR de Mathématiques et Informatique.

MC2 - Groupe 3 - 2023-2024

Suppléments sur le TD Séries

Exercice 4

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n(n-1)}{n!}$. 2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$. 3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$. 4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Correction.

1.

2. $u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ défini pour $n \geqslant 2$ et $1-\frac{1}{n^2} \in]0,1[$ donc u_n est négatif. On pose pour tout $n \geqslant 2$, $v_n = -u_n$.

On a $v_n = -\ln(1-\frac{1}{n^2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série convergente par le critère de Riemann, donc d'après le critère d'équivalence $\sum v_n$ converge et donc $\sum u_n$ converge.

Les premiers termes de la série ne semblent pas se télescoper. On fait appel à nos connaissances sur ln : $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ et $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$. La première formule se s'applique pas, on factorise donc l'argument pour utiliser les autres. Pour tout $N \geqslant 2$

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=2}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right), \\
\text{(méthode 1)} \quad &= \sum_{n=2}^{N} \ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln(n) \qquad \left(\begin{array}{l}\text{on se ramène à un terme commun } \ln(k) \\ \text{en posant } k=n-1,\ k=n+1 \text{ et } k=n\end{array}\right) \\
\text{(méthode 2)} \quad &= \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) - \ln(2)
\end{aligned}$$

D'où en passant la limite on trouve $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2)$.

3. On a $u_n = (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ défini pour $n \geqslant 2$ et $\frac{n+1}{n-1} > 1$, d'où $\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ et donc $(u_n)_{n\geqslant 2}$ n'est pas de signe constant.

On étudie la convergence absolue. L'argument du logarithme tend vers 1 donc on utilise $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ en écrivant pour tout $n \geqslant 2$: $\frac{n+1}{n-1} = \frac{n-1+2}{n-1} = 1 + \frac{2}{n-1}$. Ainsi pour $n \geqslant 2$

$$|u_n| = \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}.$$

Par le critère de Riemann et critère d'équivalence, on obtient que $\sum |u_n|$ est divergente. Ainsi on ne peut rien conclure grâce à cette étude quant à la convergence de $\sum u_n$.

Cependant, pour tout $n \geqslant 2$, posons $a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$. Comme ln est une fonction croissante et que pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{n+1}{n-1} = 1 + \frac{2}{n-1}$ d'où $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)_{n\geqslant 2}$ est décroissante, on déduit que la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante. De plus elle tend vers 0. Ainsi $\sum u_n = \sum (-1)^n a_n$ converge par le critère des séries alternées.

Pour le calcul de sa limite, on écrit pour $N \geqslant 2$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} u_n &= \sum_{n=2}^{N} (-1)^n \ln(n+1) - \sum_{n=2}^{N} (-1)^n \ln(n-1) \\
& \quad \text{on choisit de se ramener à des termes en } \ln(k+1) \text{ dans la deuxième somme,} \\
& \quad \text{on veut donc } k+1 = n-1 \text{, d'où on pose } k = n-2 \text{ et on a } n = k+2,, \\
& \quad \text{bornes : 2 et } N \text{ deviennent 0 et } N-2, \\
&= \sum_{k=2}^{N} (-1)^k \ln(k+1) - \sum_{k=0}^{N-2} (-1)^{k+2} \ln(k+1), \\
&= \sum_{k=2}^{N} (-1)^k \ln(k+1) - \sum_{k=0}^{N-2} (-1)^{k} \ln(k+1), \qquad \text{car } (-1)^{k+2} = (-1)^2(-1)^k = (-1)^k, \\
&= (-1)^{N-1}\ln(N) + (-1)^N \ln(N+1) - \ln(1) + \ln(2), \\
&= -(-1)^N \ln(N) + (-1)^N \ln(N+1) + \ln(2), \\
&= (-1)^N \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) + \ln(2) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2). \qquad \text{on combine les ln pour passer à la limite.}
\end{aligned}$$

4. $u_n = \frac{\sin(n\theta)}{2^n}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et de signe non constant pour tout $\theta \neq 0[\pi]$.

Admis pour les étudiants : les suites $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ sont soit constantes soit de signe non constant.
Plus précisément,
- si $\theta \neq 0[2\pi]$, la suite $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe non constant,
- si $\theta \neq 0[\pi]$, la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe non constant.

En pratique : on regarde si on peut simplifier les termes (cf Ex 4.9) sinon on admet que le signe est non constant.

On étudie donc la convergence absolue. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{\sin(n\theta)}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$. Or $\sum \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente (car de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$), donc par le critère de majoration $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Calculons la somme. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{e^{in\theta}}{2^n} = \sum_{n=0}^{N} \frac{\cos(n\theta)}{2^n} + i \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}.$$

Or par le même argument qu'au dessus, on montre que, $\sum \frac{e^{in\theta}}{2^n}$ et $\sum \frac{\cos(n\theta)}{2^n}$ sont absolument convergentes. Ainsi on peut passer à la limite dans l'égalité précédente et on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{2^n} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n},$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n} = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{2^n}\right).$$

Or pour $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{e^{in\theta}}{2^n} = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^n = \frac{1 - \frac{e^{i(N+1)\theta}}{2^{N+1}}}{1 - \frac{e^{i\theta}}{2}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{2 - e^{i\theta}},$$

car $\left|\frac{e^{i(N+1)\theta}}{2^{N+1}}\right| \leqslant \frac{1}{2^{N+1}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

On a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n} = \mathrm{Im}\left(\frac{2}{2 - e^{i\theta}}\right).$$

Pour identifier la partie imaginaire, on conjugue :

$$\begin{aligned}\frac{2}{2-e^{i\theta}} = \frac{2}{2-\cos\theta - i\sin\theta} &= 2\frac{2-\cos\theta+i\sin\theta}{(2-\cos\theta)^2+\sin^2\theta},\\ &= 2\frac{2-\cos\theta+i\sin\theta}{4-4\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta} = \frac{4-4\cos\theta+i2\sin\theta}{5-4\cos\theta}\end{aligned}$$

Finalement $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{2^n} = \frac{2\ \sin\ \theta}{5-4\ \cos\ \theta}$.

Exercice 5

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

1. Donner la nature de $\sum u_n$.
2. Montrer que $\sum v_n$ diverge.
3. Justifier que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Commenter.

Correction.

1. La série $\sum u_n$ est à terme général de signe non constant. $\sum |u_n|$ est une série divergente par le critère de Riemann ($\alpha = \frac{1}{2} \leqslant 1$). Ainsi l'étude de la convergence absolue de $\sum u_n$ ne permet pas de déduire quoique ce soit concernant la nature de $\sum u_n$.

   Posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ alors $u_n = (-1)^n a_n$, et la suite $(a_n)_n$ est décroissante et tend vers 0. Ainsi par le critère des séries alternées $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge.

2. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$ diverge par le critère de Riemann ($\alpha = 1 \leqslant 1$). Ainsi $\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = +\infty$. Or on a vu à la précédente question que $\sum u_n$ converge, donc par définition $\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^N u_n = \ell$ avec $\ell\in\mathbb{R}$. Comme pour tout $N\in\mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{n=1}^N v_n = \sum_{n=1}^N u_n + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n},$$

   par sommation de limites, on déduit que $\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^N v_n = +\infty$, i.e. $\sum v_n$ diverge.

3. On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n = u_n + \frac{1}{n} = u_n\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$, donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. On est en présence de deux séries de nature différente (l'une converge, l'autre diverge), mais dont les termes généraux sont équivalents. Ceci ne contredit pas le critère d'équivalence qui suppose que les deux séries sont à termes de signes constants à partir d'un certain rang, ce qui n'est pas le cas ici. Par contre cela illustre l'importance fondamentale de cette hypothèse : on ne peut rien dire de la nature réciproque de deux séries dont les termes généraux sont équivalents mais de signes non constants.

Exercice 6

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite qui tend vers zéro et a, b, c trois réels tels que $a+b+c=0$. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n = au_n + bu_{n+1} + cu_{n+2}$. Montrer que $\sum v_n$ converge et calculer sa limite.

Correction.

	$a\,u_n$	$b\,u_{n+1}$	$c\,u_{n+2}$
v_1	$a\,u_1$	$b\,u_2$	$c\,u_3$
v_2	$a\,u_2$	$b\,u_3$	$c\,u_4$
v_3	$a\,u_3$	$b\,u_4$	$\dots$
v_4	$a\,u_4$	$\dots$	$c\,u_N$
$\dots$	$\dots$	$b\,u_N$	$c\,u_{N+1}$
v_N	$a\,u_N$	$b\,u_{N+1}$	$c\,u_{N+2}$

Les diagonales de ce tableau s'annulent en sommant par hypothèse.
On intuite que la somme se ramène aux trois premiers termes $a(u_1+u_2)+b(u_2)$ et aux trois derniers $bu_{N+1}+c(u_{N+1}+u_{N+2})$ qui eux tendent vers 0.
Ainsi $\sum v_n$ semble converger.
Pour une preuve rigoureuse, il faut donc rassembler les termes de la forme

$$a\,u_n + b\,u_n + c\,u_n = 0.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} v_n &= a\sum_{n=1}^{N} u_n + b\sum_{n=1}^{N} u_{n+1} + c\sum_{n=1}^{N} u_{n+2} \\
&= a\sum_{n=1}^{N} u_n + b\sum_{n=2}^{N+1} u_n + c\sum_{n=3}^{N+2} u_n \\
&= \underbrace{(a+b+c)}_{=0}\sum_{n=3}^{N} u_n + a(u_1+u_2) + b(u_2+u_{N+1}) + c(u_{N+1}+u_{N+2}) \\
&= a(u_1+u_2) + b(u_2+u_{N+1}) + c(u_{N+1}+u_{N+2}) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} a(u_1+u_2)+b(u_2),
\end{aligned}$$

comme $u_{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u_{N+2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, puisque $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de limite nulle.

Ainsi la suite des sommes partielles de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, i.e. la suite $\left(\sum_{n=1}^{N} v_n\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$, converge. Par définition cela signifie que $\sum v_n$ converge et on a montré au passage que sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = a(u_1+u_2) + bu_2.$$