

Fiche de TD : Équations Différentielles

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1. (Coefficients constants et homogène)

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$2y'(x) + 3y(x) = 0, x \in \mathbb{R}. \quad (E_0)$$

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$3y'(x) - 9y(x) = 0, x \in \mathbb{R}. \quad (E_0)$$

Exercice 2. (Coefficients constants avec second membre)

1. a) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3, x \in \mathbb{R}. \quad (E)$$

b) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$7y'(x) + 2y(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1, x \in \mathbb{R}, \quad (E)$$

vérifiant $y(0) = 0$.

2. Donner les solutions des équations différentielles

$$\text{a) } y'(x) + y(x) = xe^{-x}, x \in \mathbb{R}. \quad (E) \qquad \text{b) } y'(x) + 2y(x) = (x+1)e^{-3x}, x \in \mathbb{R}. \quad (E)$$

3. Donner les solutions des équations différentielles

$$\text{a) } y'(x) - 2y(x) = \cos(x) + 2\sin(x), x \in \mathbb{R}. \quad (E) \qquad \text{b) } 2y'(x) + 2y(x) = 4\cos(3x), x \in \mathbb{R}. \quad (E)$$

Exercice 3. (Méthode de variation de la constante pour les ED d'ordre 1)

1. Donner les solutions des équations différentielles

$$\text{a) } y'(x) - 2xy(x) = -(2x-1)e^x, x \in \mathbb{R}. \quad (E) \qquad \text{b) } (x^2+1)y'(x) + 2xy(x) = 2x^2+x-1, x \in \mathbb{R}. \quad (E)$$

2. Donner deux solutions distinctes y_1 et y_2 de l'équation différentielle

$$xy'(x) - 2y(x) = x^3, x \in]0, +\infty[. \quad (E)$$

Que peut-on dire de $y_1 - y_2$?

3. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + \tan(x)y(x) = \sin 2x, x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad (E)$$

vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 4. (Principe de superposition)

Résoudre l'équation différentielle suivante à l'aide de la méthode de variation de la constante puis en utilisant le principe de superposition de solutions particulières

$$y'(x) + y(x) = x + e^x, x \in \mathbb{R}. \quad (E)$$

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Exercice 5.

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (\text{E})$$

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 9y(x) = x + 1, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (\text{E})$$

3. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$2y''(x) - 4y'(x) + 2y(x) = (2x - 1)e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (\text{E})$$

Exercice 6. (Méthode de la variation de la constante pour les ED d'ordre 2)

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = -\frac{e^{2x}}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}_+^*. \quad (\text{E})$$

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = \text{sh}(2x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (\text{E})$$

3. a) Donner une primitive de $x \mapsto \tan x \cos 2x$.

b) En déduire les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y(x) = \tan(x), \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[. \quad (\text{E})$$