Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, Mathématiques et Calcul 2 (MC2)

Fiche de TD : Séries

Exercice 1.
Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{n^2+1}{n^2}$.
2. $u_n = \dfrac{2^n+n}{n2^n}$.
3. $u_n = \dfrac{n^2+1}{(\ln n)^2\sqrt{n^6+2n+3}}$.
4. $u_n = \dfrac{1}{n}\ln\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
5. $u_n = \sin^2\left(\pi+\dfrac{\pi}{n}\right)$.
6. $u_n = \dfrac{\arctan n}{n+\cos^3 n+1}$.
7. $u_n = \dfrac{1}{n^2(\ln n)}$.
8. $u_n = \dfrac{1}{\ln n}$.
9. $u_n = \dfrac{\mathrm{ch}\ n}{\mathrm{ch}\ 2n}$.
10. $u_n = \dfrac{10^n}{n!}$.
11. $u_n = \dfrac{5^{2n+1}}{(n-1)!}$.
12. $u_n = \left(\dfrac{5n+7}{2n+1}\right)^n$.
13. $u_n = \dfrac{n^n+n^4}{(4n+1)^n}$.
14. $u_n = \dbinom{n}{3}3^{-n}$.

Exercice 2.
Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+6)(n+7)}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$.
4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$.

Exercice 3.
Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = (-1)^n$.
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^7+n^6\ln(n+1)}$.
3. $u_n = (-1)^n\left(\dfrac{2n+100}{3n+1}\right)^n$.
4. $u_n = \begin{cases} (-1)^k\dfrac{2}{5^k}, & \text{si } n=2k,\\ (-1)^{k+1}\dfrac{4}{5^{k+1}}, & \text{si } n=2k+1. \end{cases}$
5. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n\ln(n^2+3n)}$.
6. $u_n = \dfrac{\cos(n)^3(n+1)}{n^3}$.
7. $u_n = \cos(2n)\tan^2\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 4.
Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3n(n-1)}{n!}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.
3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$.
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{2^n}$, $\quad\theta\in\mathbb{R}$.

Exercice 5.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$.

1. Donner la nature de $\sum u_n$.

2. Montrer que $\sum v_n$ diverge.

3. Justifier que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Commenter.

Exercice 6.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite qui tend vers zéro et a, b, c trois réels tels que $a + b + c = 0$. On pose $v_n = au_n + bu_{n+1} + cu_{n+2}$. Montrer que $\sum v_n$ converge et calculer sa limite.

Exercice 7.
1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite déterminée pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}.$$

Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite déterminée pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature. On pourra chercher à exprimer u_n en fonction de v_n.

Exercice 8.
On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$ est convergente et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

2. Montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ est convergente et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Exercice 9.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

1. Montrer que la suite (a_n) est décroissante.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} -\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$.

En déduire la nature de la suite $(\ln(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ puis celle de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} w_n$ converge.

Exercice 10. ♣
Soit $p \in \mathbb{N}$. On pose $a_p = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n}$.

1. Montrer que a_p est bien défini.

2. Exprimer, à l'aide de la formule du binôme de Newton, a_p en fonction de $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}$.

3. Montrer que $a_p \in \mathbb{N}$.