Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, Mathématiques et Calcul 2 (MC2)

Fiche de TD : Intégrales impropres

Exercice 1. (Questions de cours)

1. Tracer sur un même graphe les courbes des fonctions

$$f_1 : t \mapsto \frac{1}{t}\,, \quad f_2 : t \mapsto \frac{1}{t^2}\,, \quad f_{\frac{1}{2}} : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad f : t \mapsto e^{-t} \qquad \text{sur }]0, +\infty[.$$

2. Calculer et représenter graphiquement $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t^2}, \int_1^3 \frac{dt}{t^2}, \int_1^4 \frac{dt}{t^2}, \int_1^5 \frac{dt}{t^2}$.

3. Rappeler la définition des intégrales suivantes et en déduire leur nature :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$, b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Déduire de la question précédente la nature de

a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{3}{t^2}dt$, b) $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$.

Exercice 2.

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}dt$,
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}dt$,
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(t^5+3t+1)e^{-t^2}}{t^3+4}dt$,
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{1+t}}dt$,
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(3t+1)e^t}{t^5+2}dt$,
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t^3)}{t^2}dt$,
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}dt$,
8. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{2\pi}{t^2}\right) dt$,
9. $\star \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(t+2-\sqrt{t^2+4t+1}\right) dt$,
10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\tan(\sqrt{t})}$,
11. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}dt$,
12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$,
13. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan t}\, dt$,
14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-\ln t}}{\sin t}dt$.

Exercice 3.

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que les intégrales suivantes convergent.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^2}dt$,
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^a\left(1-e^{-1/\sqrt{t}}\right) dt$,
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a(t-1)^b}$,
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1+t^b}dt$,
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^a}dt$,
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^a}dt$,
7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(t^a\right) e^{-t}dt$.

Pour 6. on se ramènera au cas précédent par changement de variable.

Exercice 4.

1. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$, c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(2t) \arctan\left(\frac{4}{t^3}\right) dt$, e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}} dt$,

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^3(t+1)}{t^5+2} dt$, d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$, f) $\displaystyle\int_0^2 \cos(1/t) dt$.

Pour a) on tracera l'allure des graphes de l'intégrande et de sa valeur absolue.

2. À l'aide d'un changement de variable, transformer l'intégrale suivante en l'une des intégrales précédentes et en déduire sa nature : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(1/t)}{t} dt$.

Exercice 5.

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^1 \ln t \, dt$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) \, dt$ converge. On note A sa valeur.

3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) \, dt$ converge et vaut A.

4. En déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin t) \, dt$ converge. On note I sa valeur. Montrer que $I = 2A$.

5. Effectuer le changement de variable $t = 2s$ pour montrer finalement que $I = -\pi \ln 2$.

Exercice 6.

1. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2} dt$ converge et que $I = \dfrac{\pi^2}{8}$.

2. Soit $\alpha > 1$. Montrer que $J_\alpha = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} dt$ converge et que $J_\alpha = \dfrac{1}{(\alpha-1)^2}$.

Exercice 7.

Soit $a > 0$. On considère l'intégrale $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(a+t)^2} dt$.

1. Montrer que $I(a)$ converge.

2. Montrer que $I(a) = \dfrac{\ln a}{a}$.

Exercice 8.

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

1. On suppose que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\ell \neq 0$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est divergente.

2. On suppose que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, alors $\ell = 0$.

3. Si $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est-elle convergente ?

4. a) Soit $g : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ où $I = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \left[k, k+\frac{1}{2^k}\right[$. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ pour tout $n \geqslant 1$. On admet que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$. Donner un encadrement de $\displaystyle\int_0^x g(t)dt$ et en déduire sa limite quand x tend vers $+\infty$?

b) Construire similairement une fonction continue ne tendant pas vers 0 en $+\infty$ et dont l'intégrale converge.

5. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et que les intégrales de f et de f' sur $[0, +\infty[$ sont convergentes. Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Exercice 9. (Révisions)

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que si pour tout $t \geqslant 27$, $0 \leqslant f(t) \leqslant t^4$, alors l'intégrale de $t \mapsto e^{-t/2} f(t)$ sur $[1, +\infty[$ converge.

2. Soit $F : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une primitive de f. On suppose que F est bornée sur $[1, +\infty[$. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$ converge.

Exercice 10. (Compléments)

1. *Généralisation du théorème de la moyenne.* Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $h : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues. On note m le minimum de g sur $[a, b]$ et M son maximum.

   a) Montrer que
$$m \int_a^b h(t)\, dt \leqslant \int_a^b g(t)h(t)\, dt \leqslant M \int_a^b h(t)\, dt.$$

   b) En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b g(t)h(t)\, dt = g(c) \int_a^b h(t)\, dt.$

2. Soit $a > 0$, $b > 0$ et $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ converge.

   a) Montrer que l'intégrale $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\, dt$ converge et que $I = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

   b) Application : calculer $J := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt.$