Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, Mathématiques et Calcul 2 (MC2)

Fiche de TD : intégrales et primitives

Exercice 1. (Révisions des formules usuelles de dérivation)

1. Dériver $g_a : t \mapsto \ln(t + \sqrt{t^2 + a})$ où $a \in \mathbb{R}$.

2. Donner l'ensemble des primitives de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ et en tracer quelques unes.

3. Donner l'ensemble des primitives de $t \mapsto \dfrac{1}{t+3}$ et en tracer quelques unes.

4. Justifier en préambule l'existence de primitives pour toutes les fonctions suivantes puis en faire le calcul :

a) $f : t \mapsto \dfrac{t^4}{1+t^5}$ $(\star)$

b) $f : t \mapsto \dfrac{t^5}{1+t^{12}}$

c) $f : t \mapsto \dfrac{\ln((t+2)^6)}{t+2}$

d) $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{1+\ln(3t)}}$

e) $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$.

$(\star)$ Rappeler les cinq racines complexes de $t \mapsto 1 + t^5$.

Exercice 2.

On considère les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ci-dessous. Dans chaque cas, les écrire sous la forme de sommes de Riemann et calculer leurs limites.

1. $S_n = n\left(\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+n)^2}\right)$.

2. $S_n = \dfrac{1}{n}\big(\sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\dfrac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\dfrac{n\pi}{n}\big)$.

3. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$.

4. $S_n = \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$.

5. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2+k^2}$.

Exercice 3.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 t\, dt$. Donner une primitive de $t \mapsto \cos^3 t \sin^2 t$ et une primitive de $t \mapsto \cos^6(3t)\sin^3(3t)$.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^4 t\, dt$. Donner les primitives de $t \mapsto \cos^3(5t)\sin^3(5t)$.

Exercice 4. (Intégration par parties)

a) Donner, pour chacune des fonctions suivantes, une primitive, en précisant son domaine de définition.

1. $t \mapsto t^2 e^{-t}$.
2. $t \mapsto \arctan t$.
3. $t \mapsto \ln t$.
4. $t \mapsto e^t \cos t$.

b) Donner des exemples de fonctions similaires pour chacun des cas précédents dont le calcul de la primitive requiert une intégration par partie. Généraliser ces exemples pour en dégager une méthode.

Exercice 5.

1. À l'aide du changement de variable $t = \cos u$, calculer $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{1-t^2}\, dt$.

2. Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{5+4t-t^2}}$. Vérifier que 2 appartient au domaine de définition de f et donner les primitives de f s'annulant en $t = 2$.

3. Donner les primitives de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2t^2-3t+2}}$ en précisant leur domaine de définition.

Exercice 6. (Fractions rationnelles)

1. Donner une primitive de $t \mapsto \dfrac{t}{t^3-3t+2}$ et une primitive de $t \mapsto \dfrac{t^4+4t}{(t^2-1)^2}$.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t+1}{t^2+9}\,dt$.

3. a) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $I(x) := \displaystyle\int_1^x \frac{2t+2}{t^2+t+\frac{5}{4}}\,dt$.

   b) Pour $x > -1$, calculer $J(x) := \displaystyle\int_1^x \frac{3t^2+5t+\frac{13}{4}}{(t+1)(t^2+t+\frac{5}{4})}\,dt$.

   c) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $K(x) := \displaystyle\int_0^x \frac{3e^{3t}+5e^{2t}+\frac{13}{4}e^t}{(e^t+1)(e^{2t}+e^t+\frac{5}{4})}\,dt$.

Exercice 7.

1. Calculer les primitives de $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{e^{-2t}+1}$.

2. Calculer les primitives de $t \mapsto \dfrac{e^t+1}{e^{2t}-5e^t+6}$ s'annulant en 0.

3. Calculer une primitive de $t \mapsto \dfrac{2e^t+1}{e^{3t}-e^{2t}-2e^t}$.

Exercice 8.

1. Rappeler l'allure des graphes des fonctions sinus et cosinus hyperboliques.

2. Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes.

   a) $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)-\operatorname{sh}(t)+1}$.

   b) $t \mapsto \dfrac{1}{1+2\operatorname{ch}(t)}$.

   c) $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)^2}$.

   d) $t \mapsto \dfrac{1}{1+\operatorname{sh}(t)+2\operatorname{ch}(t)}$.

Exercice 9.
On rappelle les formules de l'arc moitié : si pour θ donné, $u = \tan\dfrac{\theta}{2}$ est bien défini alors

$$\sin\theta = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad \cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad \tan\theta = \frac{2u}{1-u^2}\,.$$

1. a) Donner l'intervalle maximal I sur lequel la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+\sin t}$ et le changement de variable $u = \tan\dfrac{t}{2}$ sont définis.

   b) Calculer une primitive de f sur I.

   c) En déduire une primitive de f sur son domaine de définition.

2. Effectuant le changement de variable indiqué, calculer les primitives des fonctions suivantes, dont on donnera au préalable les domaines de définition.

   a) $t \mapsto \dfrac{1}{2\cos t+\sin t+1}$, avec $u = \tan\dfrac{t}{2}$.

   b) $t \mapsto \dfrac{1}{\sin t+\sin(2t)}$, avec $u = \cos t$.

   c) $t \mapsto \dfrac{1}{\cos t\,\cos(2t)}$, avec $u = \sin t$.

3. Calculer $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\sin t\cos t}\,dt$ de trois manières différentes : division par $\cos^2 t$ au numérateur et au dénominateur, changement de variable $u = \tan t$, changement de variable $u = \cos t$.

Exercice 10.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{(t^2-1)^n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{(-4)^n}{3^n} + 2n(I_n + I_{n+1})$.

2. Calculer I_2.

Exercice 11.
1. Montrer que pour tout entier $p \neq 0$, on a

$$\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{p}.$$

2. En déduire la double inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \int_n^{2n} \frac{dx}{x},$$

puis la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}$. Donner la limite de $\displaystyle\sum_{p=n}^{2n} \frac{1}{p}$.

3. Soit $k \geq 2$ un entier. En utilisant la même méthode qu'à la question 1., montrer que

$$\int_{n+1}^{kn+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \leq \int_n^{kn} \frac{dx}{x}.$$

En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{p=n}^{kn} \frac{1}{p} = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} = \ln k$.

Exercice 12.

1. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs positives ou nulles. Montrer que si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[a,b]$.

2. Soit g continue sur $[a,b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b g(x)dx = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$.

3. Soit h continue sur $[0,1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 h(x)dx = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $d \in [0,1]$ tel que $h(d) = d$

Exercice 13. (Exercice complémentaire : Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$. Montrer que

$$\Big(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\Big)^2 \leq \Big(\int_a^b f(x)^2dx\Big)\Big(\int_a^b g(x)^2dx\Big).$$

Montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité si et seulement si les fonctions f et g sont proportionnelles.
Application : soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a) = 0$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b |f(x)|^2dx \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f'(x)|^2dx$.

Exercice 14. (Exercice complémentaire)

1. Mettre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$ sous la forme d'une somme de Riemann, puis calculer sa limite.

2. Déterminer les fonctions f continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\displaystyle|\int_0^1 f(x)dx| = \int_0^1 |f(x)|dx$.

3. Calculer les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x^4+x^2+1}$.