Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, Mathématiques et Calcul 2 (MC2)

Fiche de TD : déterminant, géométrie dans le plan et l'espace

Les questions ou exercices annotés par un ♣ sont d'un niveau plus difficile que celui attendu pour l'examen.

Exercice 1.
Calculer les déterminants suivants.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 9 & -3 & 6 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

Exercice 2.
Calculer $D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ de plusieurs façons.

1. En développant suivant la première ligne.
2. En développant suivant la première colonne.
3. En remarquant que la troisième colonne s'écrit $(0, 1, 1) + (1, 0, 0)$.
4. En faisant d'autres opérations sur les colonnes.

Exercice 3.
Calculer astucieusement les déterminants des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 20 \\ 7 & -1 & 40 \\ 7 & 2 & 20 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 542 \\ 2 & 1 & 210 \\ 1 & 6 & 161 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. (♣)
Soit $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que les coefficients de P ne prennent pour valeur que 0 ou 1 et que la somme des coefficients sur chaque ligne et chaque colonne vaut toujours 1. Montrer que $|\det(P)| = 1$.

Exercice 5.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 9 & b & 0 \\ 3 & -8 & c \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & 9 & 3 \\ 0 & b & -8 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 9 \\ c & -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\Delta = \det(A)$.
2. En déduire, sans calcul, $\det(B)$.
3. En déduire, sans calcul, $\det(C)$.

Exercice 6. (Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes)

Soient $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Définir l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_3[X]$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A$, où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Justifier rigoureusement à l'aide du cours que l'opération élémentaire "$C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1$" ne modifie pas la valeur de $\det(A)$.
3. Même question pour "$C_2 \leftarrow C_2 + \alpha C_3$" pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. En déduire la validité de l'opération "$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$".

Exercice 7.
Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $u = (1, a, b + c)$, $v = (1, b, a + c)$ et $w = (1, c, a + b)$.
Montrer avec peu de calculs que $\det(u, v, w) = 0$.

Exercice 8.
Considérons, pour $k \in \mathbb{R}$, les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ w = \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de k pour lesquelles les vecteurs u, v et w forment une base de l'espace et donner alors le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs u, v et w.

Exercice 9.
Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $u = e_1 + e_2 + e_3 \in \mathbb{R}^3$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme définie par

$$\begin{aligned} f(e_1) &= au \\ f(e_2) &= bu - (b - a)e_1 \\ f(e_3) &= ae_1 + be_2 + ce_3. \end{aligned}$$

Déterminer les valeurs a, b, c pour lesquelles f est un isomorphisme.

Exercice 10.
1. Soient A et B des matrices de taille 3×3 telles que $\det(A) = 2$ et $\det(B) = -1$. Calculer le déterminant de la matrice $-A^2BA$.
2. Soient A et B des matrices de taille 2×2 telles que $\det(A) = 10$ et B est inversible. Calculer le déterminant de la matrice $3B^{-1}A^2B$.
3. Soient A, B, C des matrices de taille $n \times n$. On suppose que $\det A = 1$, $\det B = 2$ et $\det(AB^2C) = 2$. Calculer $\det(2C)$.
4. Soient A et B des matrices de taille $n \times n$. On suppose que $\det A = 1$, $\det B = 0$. Que peut-on dire de $\det(A + B)$?

Exercice 11. (♣)
Soit A une matrice de taille 3×3 vérifiant $A^2 = 6A$. On pose $B = 2A - 6I_3$ avec I_3 la matrice identité. Montrer que $\det(B) \in \{-6, 6\}$.

Exercice 12.
Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$. On considère le système d'équations linéaires

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda x + 2y + z &=& 1, \\ 2x + \lambda y + z &=& 0, \\ x - y + \lambda z &=& 0. \end{array} \right.$$

1. Combien de solutions le système admet-il ?
2. Résoudre le système avec la règle de Cramer.

Exercice 13. (Produit scalaire, norme euclidienne)
1. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $u \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées $u = (u_1, u_2, u_3)$. Calculer $\langle u, e_i \rangle$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
2. Soit $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer un vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ orthogonal à u.
3. Déterminer un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ orthogonal à :
   a) $v = (2, 7, -1)$.
   b) $-3v$.
   c) $w = (1, 0, 3)$.
   d) $t = (0, 0, 5)$.
   e) $w + 2t$.

Exercice 14. (Produit vectoriel)
Soient $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ et $w = (w_1, w_2, w_3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique. On rappelle que le **produit vectoriel**, défini par

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

est lié au déterminant par la propriété suivante

$$(u \wedge v) \cdot w = \det(u, v, w)\,.$$

1. Déterminer, sans calcul, $u \cdot (u \wedge v)$ et $v \cdot (u \wedge v)$. Interpréter géométriquement le résultat.
2. Calculer $u \wedge v$ lorsque u et v sont colinéaires.
3. On suppose que $w = u \wedge v$ et que $w \neq \vec{0}$. Montrer que (u, v, w) forme une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Calculer $w = u \wedge v$ pour $u = (1, 1, 0)$ et $v = (-1, 2, 0)$. Représenter graphiquement u, v, w et retrouver les propriétés géométriques précédentes.

Exercice 15.

1. Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur soit colinéaire à $u = (1, 1, 1)$.
2. Quel est le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs de cette base ?

Exercice 16. (Droites et plans)
1. On se place dans $\mathbb{R}^2$. Soit $v \in \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{D}$ la droite vectorielle portée par le vecteur v. Dans chacun des cas suivants, représenter graphiquement $\mathcal{D}$ et la définir par son équation paramétrique. Déterminer graphiquement un vecteur orthogonal à v et en déduire une définition ensembliste de $\mathcal{D}$ à l'aide de une équation cartésienne puis d'une équation matricielle.
   a) $v = (1, 0)$, b) $v = (1, 3)$, c) $v = (-2, 5)$.
2. On se place dans $\mathbb{R}^3$. Donner dans chacun des cas suivants les définitions ensemblistes à l'aide des équations paramétriques, cartésiennes et matricielles :
   a) Le plan vectoriel engendré par les vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(1, 1, 1)$.
   b) La droite vectorielle portée par le vecteur $(1, 2, 3)$.
   c) La droite intersection des plans $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ et $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y - z = 0\}$.

Exercice 17.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $A_t = \begin{pmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les réels t pour lesquels la matrice A_t est inversible.
2. On considère $t = 3$ et on note f l'application linéaire dont A_3 est la matrice dans la base canonique. Montrer que $\mathcal{I}m(f)$ est un plan et en donner une équation paramétrique.
3. Soient $u = (1, 1, 0)$ et $v = (3, -2, -1)$. Compléter la famille (u, v) en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 18. (Système d'équations linéaires)
1. On considère le système d'équations :

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 4 \\ x & +2y & +3z & = & 5 \\ 2x & +y & +z & = & 6 \end{cases}$$

   a) L'écrire sous la forme $Au = b$ où A est une matrice, u et b des vecteurs colonnes.
   b) A l'aide du calcul d'un déterminant, que peut-on dire sur le nombre de solutions du système ?
   c) Résoudre le système.
2. On considère le système d'équations :

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & \alpha \\ x & -y & & = & \beta \\ & 4y & +2z & = & \gamma \end{cases}$$

a) L'écrire sous la forme $Au = b$ où A est une matrice, u et b des vecteurs colonnes.

b) A l'aide du calcul d'un déterminant, que peut-on dire sur le nombre de solutions du système ?

c) On note $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de matrice A dans la base canonique. Vérifier que $f(e_2) = 2f(e_3) - f(e_1)$. En déduire que le système ne peut avoir une solution que si son second membre appartient au plan $\mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_3))$.

d) Donner un exemple de second membre pour lequel le système n'a pas de solution.

e) Donner un exemple de second membre pour lequel le système a une solution. Dans ce dernier cas, donner toutes les solutions.

Exercice 19.
On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

dans la base canonique.

1. Déterminer les réels λ pour lesquels $f - \lambda\,\mathrm{id}$ n'est pas inversible.
2. Pour chacun des λ obtenus à la question 1, choisir un vecteur $v_\lambda \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que

$$f(v_\lambda) = \lambda v_\lambda\ .$$

3. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.