Université Paris Cité, Campus Saint-Germain-des-Prés
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Licence 1re année, 2023–2024, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n°10 : Espaces vectoriels, applications linéaires et matrices

Exercice 1. Lesquels des ensembles ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? (justifier)

(1) $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y = 0\}$,

(2) $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0 \text{ ou } 2x + y - z = 0\}$,

(3) $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x + z| = |y|\}$,

(4) $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\}$.

Exercice 2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire dérivables et de dérivée continue) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $F = \{f \in E : f' + 2f = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3. On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) : (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

(1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer $F \cap G$.

Exercice 4. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$?

(1) $F_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] : d^o(P) = n\}$,

(2) $F_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = 1\}$,

(3) $F_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] : P' + XP + P(0)X^2 = 0\}$,

(4) $F_4 = \{(X - 1)(X - 2)P : P \in \mathbb{R}[X]\}$.

Exercice 5. Les familles suivantes (de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}_2[X]$ selon les cas) sont elles libres et/ou génératrices, forment-elles une base ? Donner le rang de la famille. Dans le cas où la famille est libre, la compléter en une base en ajoutant des vecteurs de la base canonique. Dans le cas où la famille est génératrice, en extraire une base. Dans le cas où la famille est liée, donner une relation de dépendance linéaire, extraire une famille libre maximale puis la compléter en une base.

(1) $\mathcal{F}_1 = \big((1, 2), (-2, 4)\big)$,

(2) $\mathcal{F}_2 = \big((1, 0, 2), (0, 1, 2)\big)$,

(3) $\mathcal{F}_3 = \big(X^2 + 1, X^2 + X, X^2 - 2X\big)$,

(4) $\mathcal{F}_4 = \big(X^2 + 1, X^2 + X, 1 - X\big)$.

Exercice 6. À tout réel λ, on associe la famille $\mathcal{F}_\lambda = \big((1, 0, \lambda), (1, 1, \lambda), (\lambda, 0, 1)\big)$. Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la famille $\mathcal{F}_\lambda$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 7. Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère les ensembles

$$F = \{(x, y, z, t) \in E : x - 2y = 0 \text{ et } y - 2z = 0\}, G = \{(x, y, z, t) \in E : x + z = y + t\}.$$

(1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

(2) Donner une base de F, une base de G, et une base de $F \cap G$.

Exercice 8. On considère une famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *échelonnée en degré*, c'est-à-dire telle que $d^o(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(P_n)_{0\leq n\leq N}$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$, puis que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9. Montrer que dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la famille $\big(x \mapsto e^{ax}\big)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre. On pourra s'intéresser au comportement à l'infini d'une combinaison linéaire de ces fonctions.

Exercice 10. Parmi les applications ci-dessous, reconnaître les applications linéaires, les endomorphismes et les formes linéaires. Justifier votre réponse.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ f(x) = (0, -x, 1)$,

(2) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R},\ f(P) = \max_{x\in[0,1]} P(x)$,

(3) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], f(P) = P(0) + P'(0)X + \frac{1}{2}P''(0)X^2$,

(4) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = (x, yz)$.

Exercice 11. Pour toutes les applications linéaires f ci-dessous, donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$, puis vérifier la cohérence du résultat à l'aide du théorème du rang.

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y) = (x + y, 0, x - y)$,

(2) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = X^2P''$,

(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x + y + z$,

(4) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = P - P'$.

Exercice 12. Pour toutes les applications linéaires f ci-dessous, lesquelles sont des isomorphismes ? On examinera uniquement la dimension de l'espace de départ et d'arrivée de f, puis en cas de besoin $\mathrm{Ker}(f)$.

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x+2y+3z, y-z, y+z)$,

(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X], f(a,b,c) = aX(X-1)+bX+c(X-1)$,

(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = (x+y+z, x-y+z)$,

(4) $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X],\ f(P) = P - P'$.

Exercice 13. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E. On pose $f(\mathcal{B}) = \big(f(\vec{e}_i)\big)_{1\leq i\leq n}$. Montrer que :

(1) f injective si et seulement si (ssi) $f(\mathcal{B})$ libre ;

(2) f surjective ssi $f(\mathcal{B})$ génératrice de F ;

(3) f bijective ssi $f(\mathcal{B})$ base de F.

Exercice 14. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f \circ f = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 15. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \circ f = f$. Montrer que pour tout $\vec{x} \in E$, $\vec{x} - f(\vec{x}) \in \mathrm{Ker}\, f$.

Exercice 16. Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(X^2 + 3X - 1), \quad B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(1, X-1, (X-1)^2\big).$$

Exercice 17. Pour toutes les applications linéaires $f : E \to F$ ci-dessous (E et F de dimension finie) calculer la matrice de f dans les bases canoniques de E et F.

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x+2y+3z, y-z, y+z)$,

(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X],\ f(a,b,c) = aX(X-1)+bX+c(X-1)$,

(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = (x+y+z, x-y+z)$,

(4) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = P - P'$.

Exercice 18. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$, muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2, X^3)$, et l'application $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ caractérisée par $f(P) = P + (1-X)P'$.

(1) Montrer que f est un endomorphisme de E.

(2) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \big(1, 1-X, 1+X^2, 1-X^3\big)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

(3) Calculer les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Exercice 19. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lorsqu'elles ont un sens, calculer les expressions $A+B$, AB, BA, $B+AB$, $A+AB$.

Exercice 20. Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. Chaque énoncé ci-dessous est-il vrai ou faux ?

(1) Si A est inversible et $A^{-1} = B$ alors B est inversible et $B^{-1} = A$.

(2) Si A et B sont inversibles et $C = AB$ alors C est inversible et $C^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

(3) Si $AB = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$.

(4) On a $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.

(5) On a $AB + BA = 0$ ssi $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

(6) Si $A + B = AB$, alors $I - A$ est inversible.

Exercice 21. Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22. Pour chacun des systèmes linéaires suivants, répondre aux questions ci-dessous.

$$(\mathcal{S}_1) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -4x & - & 4y & - & z & = & -15 \\ -2x & - & y & - & z & = & -14 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 15 \end{array} \right. , \qquad (\mathcal{S}_2) \left\{ \begin{array}{cl} -2x - 2y - 3z & = 2 \\ 4y + 3z & = 5 \\ -1 - y - x & = 1 \end{array} \right. .$$

(1) Mettre le système sous forme matricielle.

(2) Résoudre le système à l'aide de la méthode du pivot de Gauss (vue en cours).