Licence 1ère année
Mathématiques et Calcul 1

Quentin Denoyelle
quentin.denoyelle@u-paris.fr

(avec la collaboration de A. Chambaz, L. Moisan et F. Benaych)

UFR de Mathématiques et Informatique
Université Paris Cité, Campus Saint-Germain-des-Près

11 décembre 2025

Chapitre 6 : Développements Limités

Idée des développements limités

Pour simplifier une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ au voisinage d'un $x_0 \in D_f$, on peut chercher à l'approximer par une fonction polynomiale.

- Si on se fixe un polynôme de dégré 0, alors la meilleure approximation est $f(x_0)$. L'erreur est $\underset{x \to x_0}{o}(1)$ si la fonction est continue.
- Si on se fixe un polynôme de degré 1, alors la meilleure approximation est celle donnée par la tangente à f en x_0 (bien définie seulement si f est dér. en x_0). L'erreur est alors $\underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)$.
- On peut essayer de faire la même chose avec des polynômes de degrés supérieurs. On devine qu'il risque d'y avoir une contrainte de régularité sur f en x_0 pour que cela soit possible.

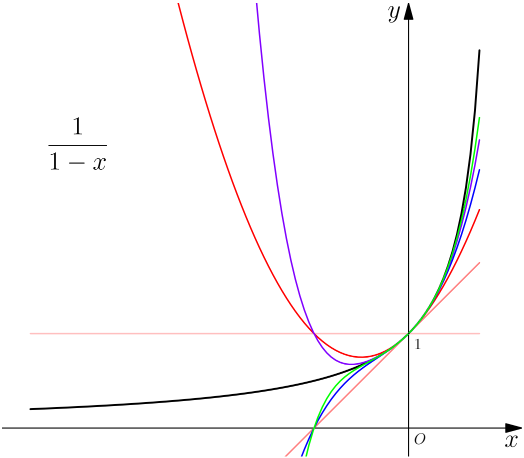
Idée des développements limités

Example

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$.
Or $-\frac{x^{n+1}}{1-x} = \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$, donc

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right).$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ peut être approchée par la fonction polynomiale $P_n : x \mapsto 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ en 0, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et l'erreur est $\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$.



$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

Pour une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$, D_f satisfaisant (H), on peut donc chercher à faire la même chose ce qui amène à se poser les questions suivantes.

- Existence de P_n ?
- Unicité de P_n ?
- Comment obtient-on P_n ?

Section 2

Définition et premières propriétés

Définition d'un DL_n en x_0

Definition

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ avec D_f satisfaisant (H). Soit $x_0 \in D_f$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On dira que f admet un développement limité à l'ordre n (DL$_n$) en x_0 s'il existe p_n une fonction polynomiale de degré au plus n tel que

$$f(x) = p_n(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^n\right).$$

La fonction p_n est appelée le polynôme de Taylor de f à l'ordre n en x_0.

Example

Soit $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \frac{1}{1-x}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors on a vu que

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \underset{x \to 0}{o}\left(x^n\right).$$

Ainsi f admet un DL$_n$ en 0. Son polynôme de Taylor à l'ordre n en 0 est la fonction polynomiale de degré n, $p_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$.

DL_n en x_0 et DL_n en 0

Remarque

En pratique on fait rarement des DL_n en x_0, on se ramène plutôt en 0 afin d'utiliser les DL usuels qui sont donnés en 0.

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f$. Faire un DL_n en x_0 de f c'est faire un DL_0 de la fonction $g : t \mapsto f(x_0 + t)$.

Proposition (Retour au DL en x_0 après le "changement de variable")

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$. Posons $g : t \in (D_f - x_0) \mapsto f(x_0 + t)$. S'il existe $h : (D_f - x_0) \to \mathbb{R}$ telle que $g(t) = h(t) + \underset{t \to 0}{o}(t^n)$ alors $f(x) = h(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^n\right)$.

DL_n en x_0 et DL_n en 0

Example

Soit $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \frac{1}{1-x}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Faisons un DL_n de f en $x_0 = -3$. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{1-(-3)\}$, on a

$$
\begin{aligned}
g(t) = f(-3+t) &= \frac{1}{1-(-3+t)} = \frac{1}{4-t} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{t}{4}\right)}, \\
&= \frac{1}{4}\left(1 + \left(\frac{t}{4}\right) + \left(\frac{t}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{t}{4}\right)^n + \underset{t\to 0}{o}(t^n)\right). \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}t + \frac{1}{4^3}t^2 + \ldots + \frac{1}{4^{n+1}}t^n + \underset{t\to 0}{o}(t^n).
\end{aligned}
$$

Donc $f(x) = g(x-(-3)) =$
$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}(x+3) + \frac{1}{4^3}(x+3)^2 + \ldots + \frac{1}{4^{n+1}}(x+3)^n + \underset{x\to -3}{o}((x+3)^n)$.

Unicité d'un DL_n en x_0

Proposition

Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$, D_f satisfaisant (H) et $x_0 \in D_f$.
Si f admet un DL_n en x_0 de polynôme de Taylor associé p_n, alors p_n est unique. Il n'existe pas d'autre fonction polynomiale de degré au plus n satisfaisant ce rôle.

Démonstration.

Supposons qu'il existe q_n fonction polynomiale de degré au plus n t.q.
$f(x) = p_n(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right) = q_n(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right)$.
Alors $p_n(x-x_0) - q_n(x-x_0) = \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right)$. Or $r_n = p_n - q_n$ est polynomiale de degré au plus n. Notons $r_n : t \mapsto a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots a_n t^n$ avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Par l'absurde s'il existe au moins un coeff. a_i, pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, non nul, alors notons k le plus petit entier naturel t.q. $a_k \neq 0$. On a

$$r_n(x-x_0) = p_n(x-x_0) - q_n(x-x_0) = a_k(x-x_0)^k \left(1 + \sum_{j=1}^{n-k} \frac{a_{k+j}}{a_k}(x-x_0)^{k+j}\right)$$

Donc $r_n(x-x_0) \underset{x\to x_0}{\sim} a_k(x-x_0)^k$. Comme $k \leqslant n$, on ne peut avoir
$r_n(x-x_0) = \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right)$. Donc tous les coefficients a_i sont nuls et donc $p_n = q_n$.

Troncature d'un DL_n en x_0

Proposition

Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$, D_f satisfaisant (H) et $x_0 \in D_f$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons : f admet un DL_n en x_0, et notons $p_n : t \mapsto a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ son poly. de Taylor associée. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, f admet un DL_m en x_0 et son poly. de Taylor est $p_m : t \mapsto a_0 + a_1 t + \ldots a_m t^m$.

Pour obtenir le DL_m de f en x_0, il faut tronquer le DL_n de f en x_0 en ne gardant que les termes de degré $\leqslant m$.

Example

Soit l'appli. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant le DL_5 en -1 suivant :

$$f(x) = -2 + (x+1)^2 + \frac{3}{4}(x+1)^4 - (x+1)^5 + \underset{x \to -1}{o}\left((x+1)^5\right).$$

Alors f admet un DL_3 en -1 qui est : $f(x) = -2 + (x+1)^2 + \underset{x \to -1}{o}\left((x+1)^3\right)$.

Tous les termes de degré strictement plus grand que 3 sont partis dans la "poubelle" $\underset{x \to -1}{o}\left((x+1)^3\right)$.

Troncature d'un DL$_n$ en x_0

Démonstration.
On a

$$f(x) = a_0 + \ldots + a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \ldots + a_n x^n + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^n\right).$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$ t.q. $m + 1 \leqslant k \leqslant n$, on a
$a_k x^k = \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^m\right)$ et $\underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^n\right) = \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^m\right)$
donc

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^m\right).$$

□

Troncature d'un DL$_n$ en x_0

Corollaire

Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$, D_f satisfaisant (H) et $x_0 \in D_f$.

- *Si f admet un DL$_n$ en x_0 avec $n \geqslant 0$, alors f est continue en x_0.*
- *Si f admet un DL$_n$ en x_0 avec $n \geqslant 1$, alors f est dérivable en x_0 (et continue en x_0.*

Démonstration.

Si f admet un DL$_n$ en x_0 avec $n \geqslant 0$, alors par troncature f admet un DL$_0$ en x_0 i.e. $f(x) = \alpha + \underset{x \to x_0}{o}(1)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Donc $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ et nécessairement $\alpha = f(x_0)$. La fonction f est bien continue en x_0.

Si f admet un DL$_n$ en x_0 avec $n \geqslant 1$, alors par troncature f admet un DL$_1$ en x_0. On a alors vu au chapitre précédent que nécessairement f est dérivable en x_0 (et donc également continue en x_0). $\square$

Section 3

Formule de Taylor-Young

Formule de Taylor-Young

Théorème

Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$, D_f satisfaisant (H) et $x_0 \in D_f$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que $\underline{f \text{ une fonction } n \text{ fois dérivable en } x_0}$.
Alors f admet un DL_n en x_0 donnée par

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right), \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right). \end{aligned}$$

C'est la formule de Taylor-Young de f à l'ordre n en x_0.

Démonstration.

Admis ! □

Formule de Taylor-Young

Remarque

Le cas $n = 1$ a été vu et démontré dans le chapitre précédent sur la dérivabilité.

Remarque

On note qu'il y a un lien entre la régularité de f et le fait d'admettre un DL à un certain ordre. On a vu pour l'instant que

- f continue en x_0 ssi f admet un DL_0 en x_0,
- f dér. en x_0 ssi f admet un DL_1 en x_0 (chap. précédent),
- Si f n fois dér. en x_0 ($n \in \mathbb{N}$), alors f admet un DL_n en x_0 (Formule de Taylor-Young).

La réciproque de la dernière assertion est fausse quand $n \geqslant 2$! Valable uniquement si $n = 0$ ou $n = 1$.

Un début de catalogue de DL usuels en 0

Grâce à la formule de Taylor-Young, on se constitue une liste de DL en 0 usuels que l'on utilise comme base pour des calculs plus compliqués.

Toutes les fonctions ci-dessous sont $\mathcal{C}^\infty$ en 0, donc admette un DL_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en 0.

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$,
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$,
- $\alpha \in \mathbb{R}$,
  $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$.

On pourrait continuer cette liste en considérant $x \mapsto \ln(1+x)$, cos, sin, tan... Cependant ces DL vont être obtenus à partir d'opérations sur les DL !

Section 4

Opérations sur les développements limités

Somme et produit de DL_n

Proposition

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ avec D satisfaisant (H), $x_0 \in D$ et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f et g admettent des DL_n en x_0 :

- $f(x) = p_n(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^n\right)$,
- $g(x) = q_n(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^n\right)$,

avec p_n, q_n des fonctions polynomiales de degré au plus n. Alors on peut effectuer les opérations suivantes

1. *somme : $f + g$ admet un DL_n en x_0 dont le polynôme de Taylor est $p_n + q_n$,*
2. *produit : fg admet un DL_n en x_0 dont le polynôme de Taylor est la troncature au degré n de la fonction polynomiale p_nq_n,*

En pratique on n'applique pas le résultat précédent mais on refait la démo à chaque fois dans le cas particulier considéré !

Example

- Soient f, g déf. sur $\mathbb{R}$ admettant DL suivants en 1 : $f(x) = 1 - (x-1) + 2(x-1)^2 + \underset{x \to 1}{o}\left((x-1)^3\right)$ et $g(x) = (x-1) + 3(x-1)^2 + \underset{x \to 1}{o}\left((x-1)^3\right)$. Alors
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \underset{x \to 0}{o}\left(x^3\right)$ et $e^x = 1 + x + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right)$. Alors

Example

- Soient f, g déf. sur $\mathbb{R}$ admettant DL suivants en 0 :
  $f(x) = x + x^2 + x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$ et $g(x) = 1 + 2x + 4x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$.
  Alors

Exercice 1

A l'aide du DL de exponentielle en 0, prouver les expressions de ces deux DL en 0.

1. $\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n}\right)$.
2. $\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$.

Composée de DL_n

Proposition

Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ avec D_f, D_g satisfaisant (H), $x_0 \in D_f$ et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f(D_f) \subset D_g$ et que f et g admettent les DL_n suivants :

- $f(x) = p_n(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^n\right)$,
- $g(y) = q_n(y - f(x_0)) + \underset{y \to f(x_0)}{o}\left((y - f(x_0))^n\right)$,

avec p_n, q_n des fonctions polynomiales de degré au plus n. Alors $g \circ f$ admet un DL_n en x_0 :
$g(f(x)) = r_n(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^n\right)$ où $x \mapsto r_n(x - x_0)$ est obtenue en ne gardant que les termes en $(x - x_0)^k$, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, dans $x \mapsto q_n(p_n(x - x_0) - f(x_0))$.

En pratique on n'applique pas le résultat précédent mais on refait la démo à chaque fois dans le cas particulier considéré !

Example

Notons $g : x \in]-\infty, 1[\mapsto \frac{1}{1-x}$ qui admet un DL à tout ordre en 0 car est infiniment dérivable en 0.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $g(x) = 1 + x + \ldots + x^n + \underset{x \to 0}{o}\left(x^n\right)$.

  Considérons $f : x \mapsto -x$ (que l'on peut définir sur $D_f =]-1, +\infty[$ de sorte que $f(D_f) \subset D_g$). On a $f(0) = 0$, donc on peut composer f dans le DL de g.
  Alors
  $$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= g(f(x)) = g(-x) = 1 + (-x) + (-x)^2 + \ldots + (-x)^n + \underset{x \to 0}{o}\left((-x)^n\right),\\ &= 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \underset{x \to 0}{o}\left((-x)^n\right).\end{aligned}$$

Example

Notons $g : x \in]-\infty, 1[\mapsto \frac{1}{1-x}$ qui admet un DL à tout ordre en 0 car est infiniment dérivable en 0.

- Considérons le DL_2 de g en 0 : $g(x) = 1 + x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$.

  Considérons f tel que $f(x) = -x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$. On a $f(0) = 0$, donc on peut composer f dans le DL de g.
  Alors

$$g(f(x)) = \frac{1}{1 - \left(-x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)},$$

$$= 1 + \left(-x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) + \left(-x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(\left(-x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)^2\right)$$

Primitivation (Intégration) d'un DL_n

Proposition

Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ avec D_f satisfaisant (H), $x_0 \in D_f$ et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f admet un DL_n en x_0 :
$f(x) = p_n(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^n\right)$. Soit F une primitive de f sur D_f (i.e. $F' = f$).
Alors F admet un DL_{n+1} en x_0 :
$F(x) = P_n(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^{n+1}\right)$ où P_n est obtenue en primitivant p_n avec pour terme constant $F(x_0)$.

Plus précisément, si $p_n : x \mapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, alors $P_n : x \mapsto F(x_0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Example

- $F : x \in]-\infty, 1[\mapsto -\ln(1-x)$ est une primitive de $f : x \in]-\infty, 1[\mapsto -\ln(1-x)$ sur $]-\infty, 1[$, puisque F est dérivable est $F' = f$. Comme

$$f(x) = 1 + x + \ldots + x^n + \underset{x \to 0}{o}\left(x^n\right),$$

on déduit par primitivation du DL que

$$-\ln(1-x) = F(x) = F(0) + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^{n+1}\right),$$

donc

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^{n+1}\right).$$

Example

- et donc on déduit aussi que

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \ln(1-(-x)),\\ &= -(-x) - \frac{(-x)^2}{2} - \ldots - \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to 0}{o}\left((-x)^{n+1}\right),\\ &= x - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n+1}\right).\end{aligned}$$

Exercice 2

Arctan est une primitive de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. En déduire le DL_5 en 0 de Arctan.

Catalogue de DL usuels en 0

On a les DL usuels suivants **à connaître parfaitement !**

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$,
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$,
- $\alpha \in \mathbb{R}$,
  $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$.
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$,
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n}\right)$,
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$,
- $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$.

Remarque

Le DL de cos en 0 peut s'obtenir à travers l'expression pour $x \in \mathbb{R} : \cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et en remplaçant dans le DL de exp la variable x par ix.

Celui de sin peut s'obtenir de la même manière ou alors en tant que primitive de cos (et donc en primitivant le DL de cos.

Celui de tan s'obtient en faisant le quotient des DL de sin et cos.

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}{1 - \frac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)} = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)},$$

$$=$$

Section 5

Applications

Calculs de limites

Example

- Donner la limite $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$.
- Donner la limite $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x-x^2}{\ln(1+x)-x}$.

Calcul de limites

Exercice 3

Donner les limites des fonctions suivantes en 0.

1. $f : x \longmapsto \frac{\sin(x)-x}{x^2}$.
2. $g : x \longmapsto \frac{\sin(x)-x}{x\ln(1-x^2)}$.

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$\ln(1+u) = u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+o(u^4)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{2^7}x^4+o(x^4)$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{2^7}x^4+o(x^4)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}+(1-x)^{\frac{1}{2}} = 2-\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{2^6}x^4+o(x^4)$$

$$\begin{aligned}
\ln\left((1+x)^{\frac{1}{2}}+(1-x)^{\frac{1}{2}}\right) &= \ln\left(2-\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{2^6}x^4+o(x^4)\right)\\
&= \ln\left(2(1-\frac{1}{8}x^2-\frac{5}{2^7}x^4+o(x^4))\right)\\
&= \ln(2)+\ln\left(1-\frac{1}{8}x^2-\frac{5}{2^7}x^4+o(x^4)\right)\\
&=
\end{aligned}$$

$$\ln(2)+(-\frac{1}{8}x^2-\frac{5}{2^7}x^4)-\frac{(-\frac{1}{8}x^2-\frac{5}{2^7}x^4)^2}{2}+\frac{(-\frac{1}{8}x^2-\frac{5}{2^7}x^4)^3}{3}+\frac{(-\frac{1}{8}x^2-\frac{5}{2^7}x^4)^4}{4}+o(x^4)$$

$$\begin{aligned}
&= \ln(2)+(-\frac{1}{8}x^2-\frac{5}{2^7}x^4)-\frac{1}{2^7}x^4+o(x^4)\\
&= \ln(2)-\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2^6}x^4+o(x^4)
\end{aligned}$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

On vient de montrer

$$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)=\ln(2)-\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2^6}x^4+o(x^4)$$

Application : Donner la limite, quand $x\to 0$, de

$$f(x)=\frac{8\ln\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}\right)+x^2}{1-\cos(x^2)}.$$

$\sqrt{1+x}\tan x$ ordre 3 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\begin{aligned}
\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\\
&= x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{1}{2}}\tan x &= \left(1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 + o(x^3)\right)\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\\
&= x + \frac{x^3}{3} + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{8}x^3 + o(x^3)\\
&= x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{5}{24}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

$\sqrt{1+x}\tan x$ ordre 3 au voisinage de 0

On vient de montrer :

$$\sqrt{1+x}\tan x = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^3 + o(x^3)$$

Application : Donner la limite, quand $x \to 0$, de

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}\tan x - \ln(1+x)}{(\sin(x))^2}.$$

$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ ordre 8 au voisinage de $+\infty$

Changement de variable : $u = \frac{1}{x}$ $u > 0$ est au voisinage de 0.

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = u\sqrt{\frac{1}{u^2}-1} = u\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}} = \sqrt{1-u^2}$$

$$(1-u^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{8}u^4 - \frac{1}{16}u^6 - \frac{5}{2^7}u^8 + o(u^8)$$

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} - \frac{1}{16x^6} - \frac{5}{2^7x^8} + o\left(\frac{1}{x^8}\right)$$

$\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ ordre 8 au voisinage de $+\infty$

On vient de montrer :

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} - \frac{1}{16x^6} - \frac{5}{2^7x^8} + o\left(\frac{1}{x^8}\right)$$

Application : Donner la limite, quand $x \to +\infty$, de

$$f(x) = x^2\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - 1\right).$$