Université Paris Cité

Licence 1ère année
Mathématiques et Calcul 1

Quentin Denoyelle
quentin.denoyelle@u-paris.fr

(avec la collaboration de A. Chambaz, L. Moisan et F. Benaych)

UFR de Mathématiques et Informatique
Université Paris Cité, Campus Saint-Germain-des-Près

5 décembre 2025

Chapitre 5 : Fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ - Dérivabilité

Section 1

Dérivabilité

Contexte et Idée

On considère comme dans le précédent chapitre des fonctions définies sur un domaine réel satisfaisant l'hypothèse structurante (H) qui pour rappel signifie

$D \subset \mathbb{R}$ satisfait (H) ssi D est une union d'intervalles dont chacun contient au moins deux réels distincts.

Idée derrière la dérivabilité. Une appli. $f : D_f \to \mathbb{R}$, avec D_f satisfaisant (H) sera dite dérivable en $x_0 \in D_f$ si on peut approximer le graphe de f au voisinage de x_0 par une droite t.q. l'erreur d'approximation en $x \in D_f$ se comporte comme $\underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)$. On dit que l'erreur est d'ordre 1. Cette droite est alors tangente au graphe de f en x_0 et la pente de la droite est le nombre dérivé de f en x_0 noté $f'(x_0)$.

Contexte et Idée

Formellement, cela revient à se poser la question de l'existence d'une limite finie en x_0 de la fonction

$$\tau_{f,x_0} : x \in D_f \setminus \{x_0\} \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

appelée le taux d'accroissement de f en x_0.

Dérivabilité en un point

Definition

Soit l'application $f : D_f \to \mathbb{R}$ avec D_f satisfaisant (H). Soit $x_0 \in D_f$. On dira que f est dérivable en x_0 si l'application

$$\tau_{f,x_0} : x \in D_f \setminus \{x_0\} \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

admet une limite finie en x_0. Dans ce cas on note $f'(x_0)$ la limite qui est appelée le nombre dérivée de f en x_0.

Example

Soient l'appli. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ et $x_0 \in D_f$. On a

$$\forall x \in D_f \setminus \{x_0\}, \quad \tau_{f,x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0.$$

Ainsi τ_{f,x_0} admet une limite finie en x_0 qui faut $2x_0$. La fonction f est donc dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 2x_0$!

Dérivabilité globale

Definition

Soit l'application $f : D_f \to \mathbb{R}$ avec D_f satisfaisant (H). On dira que f est dérivable sur $D \subset D_f$ si f est dérivable en x_0 pour tout $x_0 \in D$.
On note alors $f' : D \to \mathbb{R}$ l'application qui a tout $x \in D$ associe le nombre dérivée de f en x : $f'(x)$. L'application f' est appelée la dérivée de f (sur D).

Example

On a vu que l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$, de nombre dérivée $2x$. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est l'appli. $f' : x \in \mathbb{R} \mapsto 2x$.

Subsection 2

Catalogue de dérivées

Dérivabilité et dérivée de fonctions usuelles

Proposition

Les fonctions usuelles : polynomiales, sin, cos, tan, *exponentielle, logarithme népérien,* ch, sh, *sont dérivables sur leur domaine de définition naturel. De plus leur dérivée sont données ci-dessous.*

f	f'
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto 1 + \tan^2(x)$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$
$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$	$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$

Dérivation d'une fonction réciproque

Proposition

Soit $f : I \to J$, où I et J sont des intervalles contenant au moins deux réels. On suppose que l'application f est bijective.
Soit $y_0 \in J$. Notons $x_0 = f^{-1}(y_0) \in I$. Si

- *f est dérivable en x_0,*
- *$f'(x_0) \neq 0$,*

alors f^{-1} est dérivable en y_0 et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

En particulier si f est dérivable sur I et f' ne s'annule jamais sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Dérivation d'une fonction réciproque

Démonstration.

Soit $y \in J$, $y \neq y_0$. Notons $x \in I$ (unique) tel que $f(x) = y$ et on a $x \neq x_0$. Alors

$$\begin{aligned}\tau_{f^{-1},y_0}(y) &= \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)},\\ &= \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\tau_{f,x_0}(x)}.\end{aligned}$$

Comme f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, on déduit donc que $x \in I \setminus \{x_0\} \mapsto \frac{1}{\tau_{f,x_0}(x)}$ admet une limite finie en x_0 qui vaut $\frac{1}{f'(x_0)}$, par passage à l'inverse d'une limite.

Ainsi f^{-1} est bien dérivable en y_0 et $(f^{-1})(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$. $\square$

Dérivabilité et dérivée de fonctions usuelles

Example

- $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ t.q. : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = x^2$; est une bijection de réciproque la fonction racine carré. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x \neq 0$ donc $f^{-1} = \sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ est une bij. de réciproque Arccos. Pour tout $x \in [0, \pi]$, $\cos'(x) = -\sin(x)$ et donc $\cos'(x) \neq 0$ ssi $x \in]0, \pi[$. Ainsi Arccos est dérivable sur $\cos(]0, \pi[) =]-1, 1[$ et pour tout $x \in]-1, 1[$, $\mathrm{Arccos}'(x) = \frac{1}{-\sin(\mathrm{Arccos}(x))}$.
  On a $\sin(\mathrm{Arccos}(x)) > 0$ car $\mathrm{Arccos}(x) \in]0, \pi[$, donc $\sin(\mathrm{Arccos}(x)) = \sqrt{\sin(\mathrm{Arccos}(x))^2} = \sqrt{1 - \cos(\mathrm{Arccos}(x))^2} = \sqrt{1 - x^2}$ et donc $\mathrm{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Dérivabilité et dérivée de fonctions usuelles

Exercice 1
Procéder de la même manière pour trouver les domaines de dérivabilité de $\ln$, Arcsin, Arctan, puis l'expression de leur dérivée.

Dérivabilité de fonctions usuelles

Proposition

Les fonctions usuelles : logarithme népérien, Arccos, Arcsin, Arctan *sont dérivables sur respectivement* $\mathbb{R}_+^*$, $]-1,1[$, $]-1,1[$ *et* $\mathbb{R}$ *et les expressions de leur dérivée sont données ci-dessous.*

f	f'
$x \longmapsto \ln(x)$	$x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{1}{x}$
$x \longmapsto \text{Arcsin}(x)$	$x \in]-1,1[\longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \longmapsto \text{Arccos}(x)$	$x \in]-1,1[\longmapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \longmapsto \text{Arctan}(x)$	$x \in]-1,1[\longmapsto \frac{1}{1+x^2}$

Section 2

Une autre définition de la dérivabilité. Introduction aux développements limités.

DL1

Definition

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, D_f satisfaisant (H). Soit $x_0 \in D_f$. On dira que f admet un développement limité à l'ordre 1 (DL1) en x_0 s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \alpha + \beta(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0).$$

Remarque

Interprétation : au voisinage de x_0, f est approximativement la fonction affine $g : x \mapsto \alpha + \beta(x - x_0)$ (dont le graphe est une droite affine). L'erreur d'approximation $|f - g|$, ou ce que l'on appelle aussi le *reste* de cette approximation, est $\underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^1\right)$, soit une quantité qui tend vers 0 "plus vite" que $x - x_0$. On dit que l'erreur est d'ordre 1.

DL1 : interprétation à travers un dessin

Example

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Essayons de voir si f admet un DL1 en x_0.

DL1 et dérivabilité

Proposition (DL1 en x_0 ⇒ dérivabilité en x_0)

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, D_f satisfaisant (H). Soit $x_0 \in D_f$. On suppose que f admet un DL1 en x_0, i.e. il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \alpha + \beta(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0).$$

Alors f est dérivable en x_0 et $\alpha = f(x_0)$, $\beta = f'(x_0)$.

Démonstration.

On a $x - x_0 = \underset{x \to x_0}{o}(1)$, donc $\beta(x - x_0) = \underset{x \to x_0}{o}(1)$ et $\underset{x \to x_0}{o}(x - x_0) = \underset{x \to x_0}{o}(1)$ (transitivité). Par sommation des o, on a donc $f(x) = \alpha + \underset{x \to x_0}{o}(1)$, soit $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$. Or comme $x_0 \in D_f$, nécessairement $\alpha = f(x_0)$.
On a donc $f(x) = f(x_0) + \beta(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)$, donc $\tau_{f,x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \beta + \underset{x \to x_0}{o}(1)$. Donc $\lim_{x \to x_0} \tau_{f,x_0}(x) = \beta \in \mathbb{R}$. La fonction f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \beta$. $\square$

DL1 et dérivabilité

Proposition (DL1 en x_0 $\Leftarrow$ dérivabilité en x_0)

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, D_f satisfaisant (H). Soit $x_0 \in D_f$. Si f est dérivable en x_0 alors f admet un DL1 en x_0 car

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0).$$

Cette relation est appelée formule de Taylor-Young de f en x_0 à l'ordre 1.

Démonstration.

Comme f dér. en x_0, on a $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right) = 0$ i.e. $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(1)$, soit en multipliant par $x - x_0$, puis passant de l'autre côté $f(x_0)$:
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)$. □

Remarque

On a prouvé : f dérivable en x_0 ssi f admet un DL1 en x_0.

Example

- Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on a vu que $f(x) = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)$, donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 2x_0$ (on le savait déjà !).
- Comme $\sin$ est dérivable en 0, $\sin$ admet un DL1 en 0 et

$$\sin(x) = \sin(0) + \sin'(0)(x - 0) + \underset{x \to 0}{o}(x - 0) = \cos(0)x + \underset{x \to 0}{o}(x),$$
$$= x + \underset{x \to 0}{o}(x).$$

En particulier $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$. Fait parti des équivalents les plus utiles !

Dérivabilité implique continuité

Proposition

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, D_f satisfaisant (H). Soit $x_0 \in D_f$.
Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Démonstration.

Si f dér. en x_0 alors par proposition précédente $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)$, ce qui implique $f(x) = f(x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(1)$ d'où $\lim_{x_0} f = f(x_0)$. C'est la définition de la continuité de f en x_0 ! □

Remarque

Attention la réciproque est fausse ! Continuité en x_0 n'implique pas dérivabilité en x_0.

Fonction continue non-dérivable

Exercice 2

Montrer via les deux méthodes suivantes, que l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ est continue en 0.

1. En utilisant la définition par quantificateur de la continuité d'une fonction en 0.
2. En utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction en 0.

Example

La fonction f ci-dessus (valeur absolue) n'est pas dérivable en 0. En effet :

Section 3

Opérations sur la dérivation

Proposition

La somme, le produit, le passage à l'inverse, le quotient, la composée de fonctions dérivables donnent des fonctions toujours dérivables, pourvu que ces opérations fassent sens.

Example

- La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $\frac{1}{\ln}$ est définie sur $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$ donc $\frac{1}{\ln}$ est dérivable sur D par opération de passage à l'inverse.
- La fonction racine carré est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
  La fonction $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$ a pour domaine de définition naturelle $[1, +\infty[$, mais n'est dérivable que sur $]1, +\infty[$, par composée de fonctions dérivables, car $\ln(1) = 0$ et $\sqrt{\cdot}$ n'est pas dérivable en 0. Par contre f est continue sur $[1, +\infty[$ par composée de fonctions continues.

Proposition

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in D$. On suppose f et g dérivables en x_0. Alors

1. *$f+g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,*
2. *fg est dérivable en x_0 et*
   $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
3. *si $g(x_0) \neq 0$, on a $\frac{1}{g}$ est dérivable en x_0 et*
   $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.
4. *si $g(x_0) \neq 0$, on a $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et*
   $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Si g est dér. en $f(x_0)$ et f dér. en x_0, alors

5. *$g \circ f$ est dérivable en x_0 et $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.*

Démonstration.

1. En exercice !
2. Soit $x \in D$, $x \neq x_0$. On a

$$\begin{aligned}\tau_{x_0,fg}(x) &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0},\\ &= \frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0},\\ &= g(x)\tau_{x_0,f}(x)+f(x_0)\tau_{x_0,g}(x).\end{aligned}$$

   Comme f et g dér. en x_0, $\tau_{x_0,f}$ et $\tau_{x_0,g}$ admettent resp. $f'(x_0)$ et $g'(x_0)$ comme limite en x_0. De plus g étant continue en x_0 car dér. en x_0 g tend vers $g(x_0)$ en x_0. Par produits et somme de limites, $\tau_{x_0,fg}$ admet comme limite $g(x_0)f'(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$ en x_0. Donc fg est dér. en x_0 et $(fg)'(x_0) = g(x_0)f'(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

Démonstration.

3. Pour simplifier la démonstration, on suppose que g ne s'annule pas sur D (et pas uniquement en x_0). Soit $x \in D$, $x \neq x_0$. On a

$$\tau_{x_0,\frac{1}{g}}(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{g(x) - g(x_0)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} = -\frac{\tau_{x_0,g}(x)}{g(x_0)g(x)}.$$

La fonction g est continue en x_0 car dér. en x_0, donc $\lim\limits_{x_0} g = g(x_0)$. La fonction g étant dér. en x_0, on a $\lim_{x_0} \tau_{x_0,g} = g'(x_0)$. Par quotient de limites, on a donc $\lim\limits_{x \to x_0} \tau_{x_0,\frac{1}{g}}(x) = -\dfrac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$. La fonction $\frac{1}{g}$ est donc dérivable en x_0 de dérivée $-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

4. Exercice ! *Indication : utiliser 3. et 4..*

Démonstration.

5.

□

Example

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\sin(1 - e^x)}{x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.