Licence 1ère année
Mathématiques et Calcul 1

Quentin Denoyelle
quentin.denoyelle@u-paris.fr

(avec la collaboration de A. Chambaz, L. Moisan et F. Benaych)

UFR de Mathématiques et Informatique
Université Paris Cité, Campus Saint-Germain-des-Près

5 décembre 2025

Chapitre 4 : Fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) - Limites - Continuité

Cadre d'étude

Nous étudierons dans ce chapitre (et les suivants) des fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) définies sur des domaines $D \subset \mathbb{R}$ tels que

D est une union d'intervalles dont chacun contient au moins deux réels distincts.

On fera référence à cette hypothèse en disant que $D \subset \mathbb{R}$ satisfait l'hypothèse structurelle d'étude notée (H).

Remarque

On rappelle que $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall z \in \mathbb{R}, x \leqslant z \leqslant y \Rightarrow z \in I.$$

Ainsi un singleton, par exemple $I = \{-3\}$, est un intervalle. Mais il ne contient pas deux réels distincts.

Cadre d'étude

Les domaines de déf. des fonctions suivantes satisfont (H).

Example

- Soit l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$. Son domaine de déf. $D_f = \mathbb{R}$ est un intervalle contenant au moins deux points distincts.
- Soit l'application $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(x)$. Son domaine de déf. $D_f = \mathbb{R}_+^*$ est un intervalle contenant au moins deux points distincts.
- Soit l'application $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$. Son domaine de définition $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ est l'union de deux intervalles contenant chacun au moins deux points distincts.
- Soit l'application $f : x \in \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\mapsto \tan(x)$. Son domaine de déf. $D_f = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ est une union infinie d'intervalles contenant au moins deux points dintincts.

Cadre d'étude

Les domaines de déf. suivants ne satisfont pas (H).

Example

- Soit l'application $f : n \in \mathbb{Z} \mapsto n^2$. Son domaine de définition $D_f = \mathbb{Z}$ n'est pas une union d'intervalles contenant au moins deux points distincts.
- Soit l'application $f : x \in \mathbb{N}^* \mapsto \ln(x)$. Son domaine de définition $D_f = \mathbb{N}^*$ n'est pas une union d'intervalles contenant chacun au moins deux points distincts.
- Soit l'application $f : x \in \{-1\} \cup \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x^2}$. Son domaine de définition $D_f = \{-1\} \cup \mathbb{R}_+^*$ n'est pas une union d'intervalles contenant chacun au moins deux points distincts.

Section 1

Manipulations et propriétés de base sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

Subsection 1

Opérations sur les fonctions

Opérations sur les fonctions

Definition

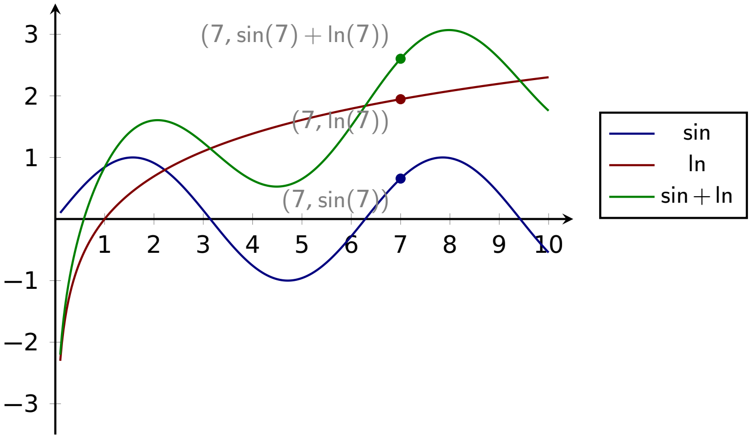
Soit f et g deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ définies sur resp. $D_f \subset \mathbb{R}$ et $D_g \subset \mathbb{R}$. On définit :

- la somme : $f + g : x \in D_f \cap D_g \mapsto f(x) + g(x)$,
- la multiplication par un scalaire : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda f) : x \in D_f \mapsto \lambda f(x)$,
- le produit : $fg : x \in D_f \cap D_g \mapsto f(x)g(x)$,
- le quotient : $\frac{f}{g} : x \in D \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ où $D = \{x \in D_f \cap D_g \,/\, g(x) \neq 0\}$.

Remarque

Nous avons déjà défini la composée.

Représentation de la somme de deux fonctions



Représentation du graphe de $\ln$, $\sin$ et de $\ln + \sin$.

Subsection 2

Fonctions et ordre

Comparaison des fonctions

Definition

Soit f et g deux fonctions à valeurs réelles définies sur $D \subset \mathbb{R}$.
On dit que f est inférieure à g sur D si

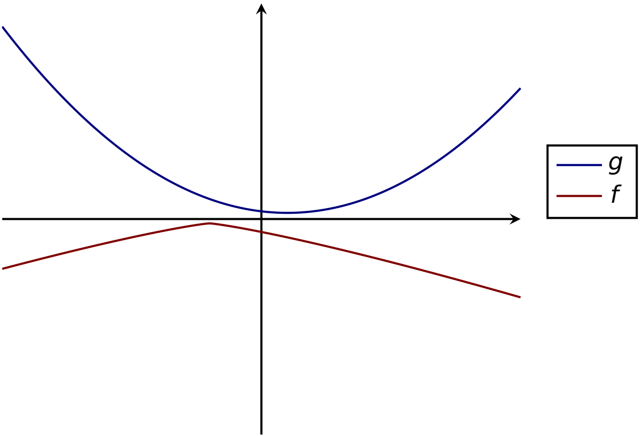
$$\forall x \in D, \quad f(x) \leqslant g(x),$$

que l'on note $f \leqslant g$.

Remarque

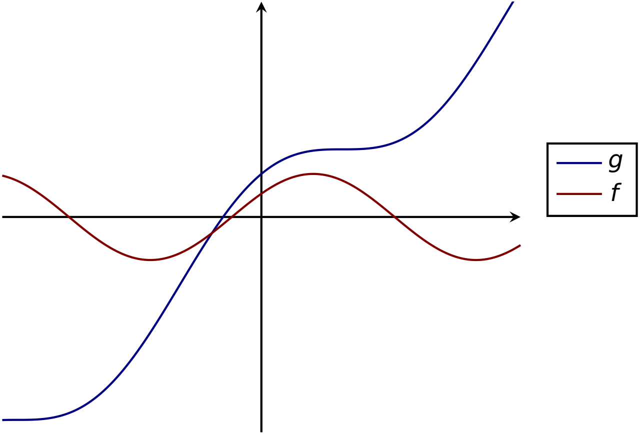
Deux fonctions ne sont pas toujours comparables.

Deux fonctions comparables



On a $f \leqslant g$. Le graphe de g est au-dessus de celui de f.

Deux fonctions non comparables



Ces deux fonctions ne sont pas comparables. L'assertion : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant g(x)$ et l'assertion $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leqslant f(x)$ sont toutes les deux fausses.

Comparaison des fonctions

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, dire si $f \leqslant g$, si $g \leqslant f$ ou si aucune des deux n'est vraie.

1. $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 + 1$, $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x)$.
2. $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 + 2x - 1$, $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin(x)$.
3. $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 + 2x + 3$.
4. $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{4-x^2}{1+x^2}$, $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$.

Fonction minorée, majorée, bornée

Definition

Soit l'application $f : D_f \to \mathbb{R}$. On dira que

- f est minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, m \leqslant f(x)$,
- f est majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, f(x) \leqslant M$,
- f est bornée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, |f(x)| \leqslant M$.

Remarque

Ces définitions reposent sur la notion de sous ensemble de $\mathbb{R}$ minorée, majorée et bornée que nous avons vu au début du semestre.
Par exemple dire que f est minorée, c'est dire que l'image de f est minorée, *i.e.* $f(D_f) = \{f(x) / x \in D_f\}$ est minorée.
La notion de fonction bornée s'étend au cas où f est à valeurs complexes (la valeur absolue est remplacée par le module).

Fonction minorée, majorée, bornée

Example

Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{-2\cos(x)e^{ix^2+1}}{\sin(x)^2+1}$ qui est à valeurs complexes.

Son domaine de définition naturelle est $D_f = \mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x)^2 \geqslant 0$, donc $\sin(x)^2 + 1 \geqslant 1$.

La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$

- $\sin(x)^2 + 1 \geqslant 1$, donc $\frac{1}{\sin(x)^2+1} \leqslant 1$,
- $\left|-2\cos(x)e^{ix^2+1}\right| = 2\left|\cos(x)e^{ix^2}e\right| = 2e\left|\cos(x)\right| \leqslant 2e$,

donc $|f(x)| \leqslant 2e$.

Fonctions monotones

Definition

Soit f une fonction à valeurs réelles définies sur $D_f \subset \mathbb{R}$.
On dit que f est :

- croissante si : $\forall x, y \in D_f, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$,
- décroissante si : $\forall x, y \in D_f, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$,
- strictement croissante si : $\forall x, y \in D_f, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$,
- strictement décroissante si : $\forall x, y \in D_f, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$,
- monotone si f est croissante ou décroissante,
- strictement monotone si f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Fonctions monotones

Remarque

- L'application d'une fonction croissante à une inégalité préserve le sens de l'inégalité.
- L'application d'une fonction décroissante à une inégalité inverse le sens de l'inégalité.
- On parle parfois de monotonie sur un sous ensemble de D_f. On dira par exemple que l'application $f : D_f \to \mathbb{R}$ est croissante sur $D \subset D_f$ si : $\forall x, y \in D, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(x)$. C'est la définition de la croissance pour la fonction qui est la restriction de f à D à savoir de l'application $f_{|D} : x \in D \mapsto f(x)$.

  Par exemple l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Monotonie et opérations

Proposition

Soient les applications $f : D_f \to \mathbb{R}$ *et* $g : D_g \to \mathbb{R}$.

- *Si* f *et* g *sont croissantes, alors* $f + g$ *est croissante.*
- *La multiplication par un scalaire* λ *positif préserve la monotonie.*
- *Si* f *et* g *sont croissantes et positives, alors* fg *est croissante.*
- *Si* f *et* g *sont toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes, et si* $g(D_g) \subset D_f$*, alors* $f \circ g$ *est croissante.*
- *Si une des deux fonctions,* f *ou* g*, est croissante et l'autre décroissante, et si* $g(D_g) \subset D_f$*, alors* $f \circ g$ *est décroissante.*

Exercice 2

Faire les preuves de ces résultats !

Monotonie et opérations

Remarque

La liste des résultats de la précédente proposition est loin d'être exhaustive. Inventez vos propres résultats et démontrez les !

Enfin, notez que la croissance de $f+g$ a lieu sur $D_f \cap D_g$, idem pour fg. La fonction $f \circ g$ est elle définie sur D_g.

Subsection 3

Propriétés diverses

Parité, imparité

Definition

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ satisfaisant (H) et

$$\forall x \in D, \quad -x \in D.$$

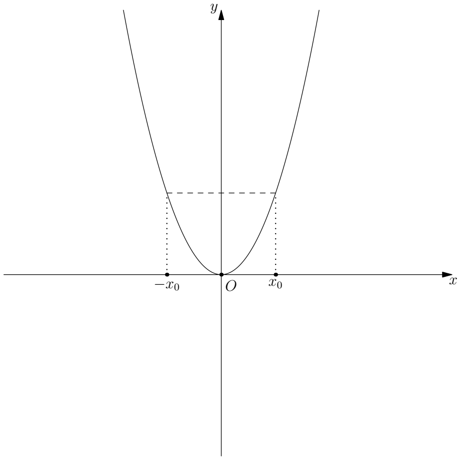
On dit qu'une application $f : D \to \mathbb{R}$ est

- paire si : $\forall x \in U, \quad f(-x) = f(x)$
- impaire si : $\forall x \in U, \quad f(-x) = -f(x)$

Example

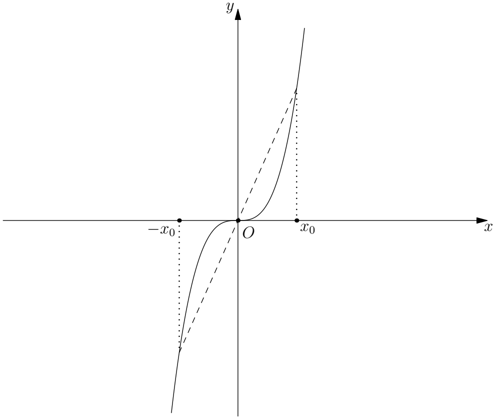
La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est paire car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ est impaire car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

Fonction paire



La fonction f représentée ici est paire puisque : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$.
Le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Fonction impaire



La fonction f représentée ici est impaire puisque : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$. Le graphe de f satisfait une symétrie centrale par rapport à l'origine.

Périodicité

Definition

Soit $T > 0$ et D une partie de $\mathbb{R}$ satisfaisant (H). On dira que l'application $f : D \to \mathbb{R}$ est T-périodique si

$$\forall x \in D, \quad x + T \in D \qquad \text{et} \qquad \forall x \in D, \quad f(x+T) = f(x).$$

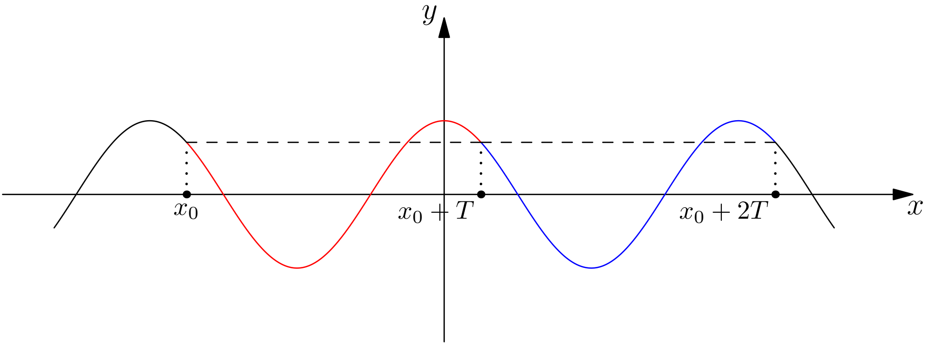
On dira que f est périodique s'il existe $T > 0$ tel que f est T-périodique.

On appellera période fondamentale de la fonction périodique f, le plus petit $T > 0$ tel que f est T-périodique.

Example

La fonction $\cos$ définie sur $\mathbb{R}$ est 2π-périodique, mais aussi 4π périodique, 6π-périodique... Cependant sa période fondamentale est 2π.

Fonction périodique



La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$ représentée ici est périodique de période fondamentale $T = 2\pi$. Le graphe de f se répète tous les 2π.

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, dire si f est paire ou impaire. Montrer que 2., 4., 6. et 7. sont périodiques. On précisera à chaque fois au préalable le domaine de définition naturelle.

1. $f : x \mapsto x^2 + 1$.
2. $f : x \mapsto \sin(4x)$.
3. $f : x \mapsto x(x^4 - 3)$.
4. $f : x \mapsto \cos(x)$.
5. $f : x \mapsto x|x|$.
6. $f : x \mapsto \sin^2(3x)$.
7. $f : x \mapsto \sin^2(x + \frac{\pi}{3})$.
8. $f : x \mapsto \frac{4-x^3}{1+x^2}$.

Section 2

Les fonctions usuelles

Fonctions polynomiales

Proposition

On appelle fonction polynomiale, toute fonction du type

$$f : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

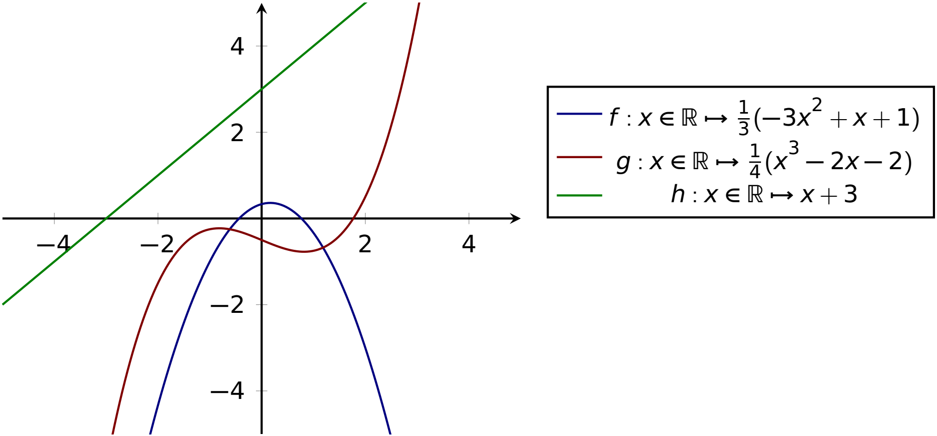
où $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

- *Domaine de définition naturel :* $\mathbb{R}$.

Remarque

Les quotients de fonctions polynomiales définissent les fonctions "fraction rationnelle" dont les domaines de définition naturel sont $\mathbb{R}$ privés des racines du dénominateur (ce que l'on appelle les pôles de la fraction rationnelle).

Fonctions polynomiales



Des graphes de fonctions polynomiales.

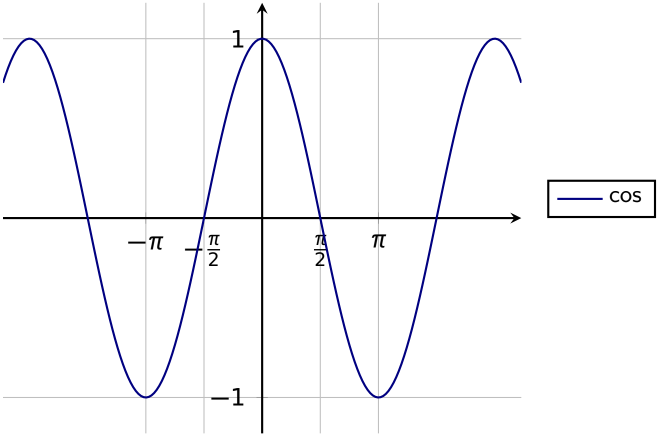
Cosinus

Proposition

La fonction cosinus, notée $\cos$*, satisfait :*

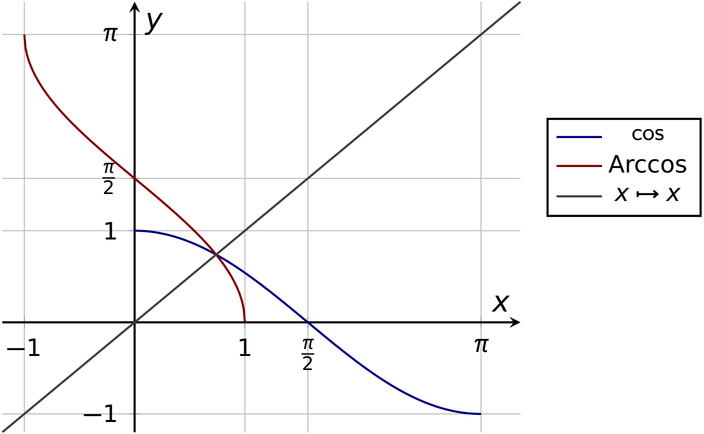
- *domaine de définition naturel :* $\mathbb{R}$*,*
- 2π*-périodique,*
- *paire,*
- *strictement décroissante sur* $[0, \pi]$*,*
- *bijection de* $[0, \pi]$ *dans* $[-1, 1]$*,*
- *application réciproque* $\mathrm{Arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ *strictement décroissante.*

Cosinus



Graphe de la fonction cosinus. Ce dernier est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et se répète tous les 2π.

Cosinus



Graphe de cos représentée sur $[0, \pi]$ et graphe de Arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$. Le graphe de Arccos est obtenue par symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $y = x$.

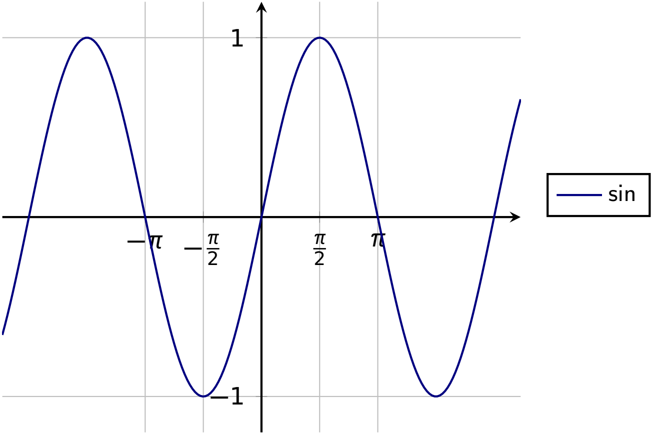
Sinus

Proposition

La fonction sinus, notée $\sin$, *satisfait :*

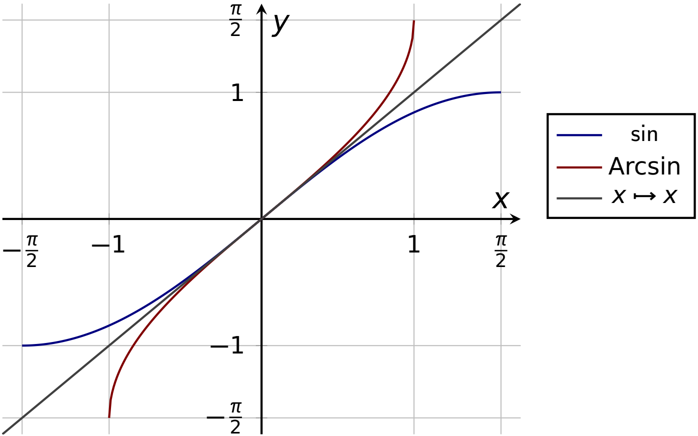
- *domaine de définition naturel :* $\mathbb{R}$,
- 2π*-périodique,*
- *impaire,*
- *strictement croissante sur* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
- *bijection de* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *dans* $[-1, 1]$,
- *application réciproque* $\mathrm{Arcsin} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *strictement croissante.*

Sinus



Graphe de la fonction sinus. Ce dernier est symétrique par symétrie centrale par rapport à l'origine et se répète tous les 2π.

Sinus



Graphe de $\sin$ représentée sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et graphe de Arcsin : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Le graphe de Arcsin est obtenue par symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Tangente

Proposition

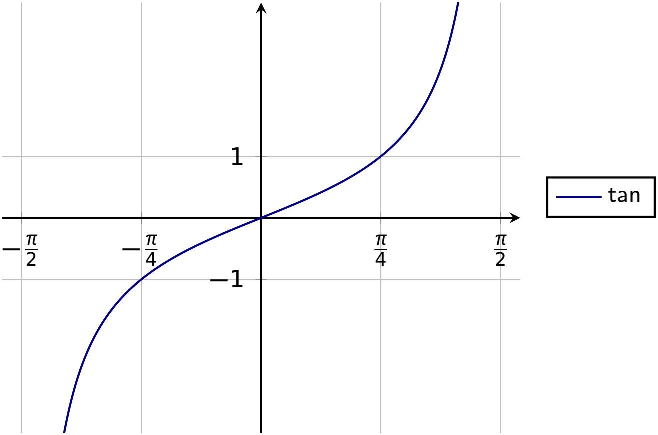
La fonction tangente, notée $\tan = \frac{\sin}{\cos}$*, satisfait :*

- *domaine de définition naturel :* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$*,*
- *impaire,*
- *strictement croissante sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$*,*
- *bijection de* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *dans* $\mathbb{R}$*,*
- *application réciproque* $\text{Arctan} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *strictement croissante.*

Remarque

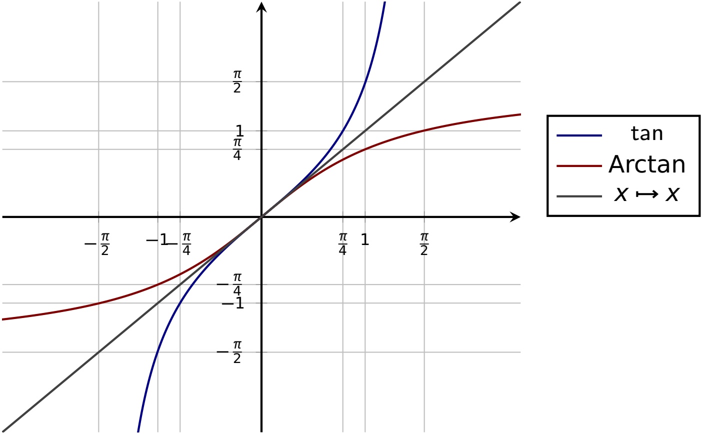
La fonction $\tan$ est parfois étendue par π-périodicité au domaine de définition $\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$.

Tangente



Graphe de la fonction tangente. Ce dernier est symétrique par symétrie centrale par rapport à l'origine.

Tangente



Graphe de $\tan$ représentée sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et graphe de Arctan : $\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Le graphe de Arctan est obtenue par symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exponentielle et logarithme népérien

Proposition

La fonction exponentielle, notée $\exp$ *ou* e*, satisfait :*

- *domaine de définition naturel :* $\mathbb{R}$*,*
- *strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*,*
- *bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+^*$*,*
- *application réciproque* $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$*, logarithme népérien, strictement croissante.*
- $\forall x, x' \in \mathbb{R}$, $e^{x+x'} = e^x e^{x'}$,
- $\forall x, x' \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(xx') = \ln(x) + \ln(x')$.

Exponentielle et logarithme népérien

Remarque

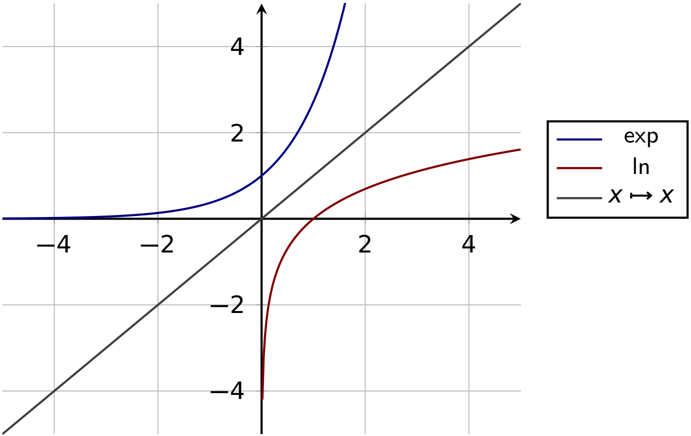
- Il y a plusieurs manières de définir la fonction exponentielle. Une des plus commune est à travers le fait que c'est l'unique solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 : $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = y(t)$, avec la condition initiale $y(0) = 1$.

  Nous avons vu ensemble qu'il est également possible de définir la fonction exponentielle comme la somme infinie d'une série :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

- On définit plus généralement le logarithme en base $a > 1$ via l'expression $\log_a : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$. $\log_a$ est la fonction réciproque de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto a^x = e^{x\ln(a)}$. En pratique on utilise pas mal $\log_{10}$ (notamment en physique), ou $\log_2$ en informatique. On a donc pour $k \in \mathbb{Z}$, $\log_{10}(10^k) = k$. La fonction $\log_e$ est donc le logarithme népérien $\ln$ qui est parfois noté $\log$.

Exponentielle, logarithme



Graphe de la fonction exponentielle et de logarithme népérien.

Cosinus hyperbolique : ch

Proposition

La fonction cosinus hyperbolique, notée ch, *et définie par :*
$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, *satisfait*

- *domaine de définition naturel :* $\mathbb{R}$,
- *paire,*
- *strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$,
- *bijection de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $[1, +\infty[$,
- *application réciproque* $\mathrm{argch} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$.

Exercice 4

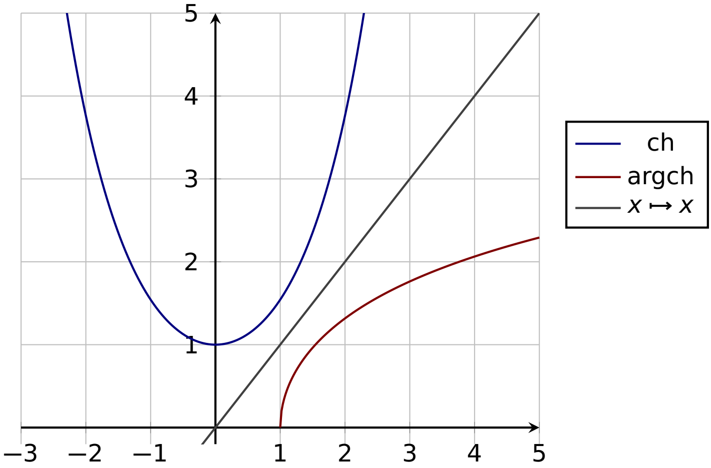
Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $\mathrm{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

Cosinus hyperbolique : ch

Remarque

- On peut définir ch sur $\mathbb{C}$: $\forall z \in \mathbb{C}$, $\text{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$. Et ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \text{ch}(ix)$.
- La fonction ch donne la forme d'un cable homogène fixé aux deux extrémités et soumis à la pesanteur.

Cosinus hyperbolique : ch



Graphe de la fonction ch, qui est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, et de argch : $[1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$.

Sinus hyperbolique : sh

Proposition

La fonction sinus hyperbolique, notée sh, *et définie par :*
$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, *satisfait*

- *domaine de définition naturel :* $\mathbb{R}$,
- *impaire,*
- *strictement croissante sur* $\mathbb{R}$,
- *bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$,
- *application réciproque* $\mathrm{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *donc également strictement croissante.*

Exercice 5

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

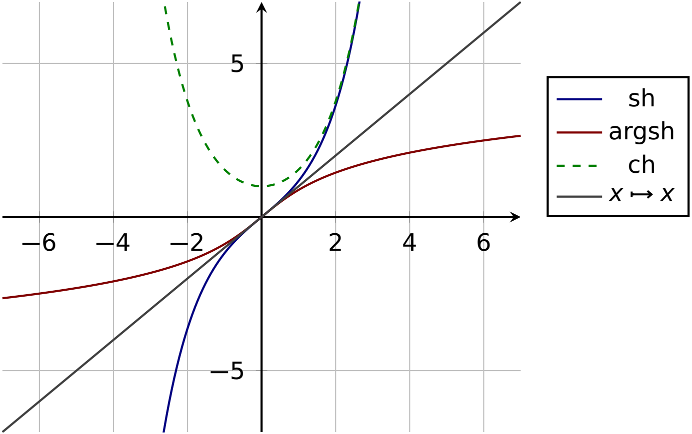
Sinus hyperbolique : sh

Remarque

- On peut définir sh sur $\mathbb{C}$: $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$. Et ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \mathrm{sh}(ix)$.
- Par analogie avec la tangente, on définit la tangente hyperbolique $\mathrm{th} = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$. Son domaine de définition naturelle est $\mathbb{R}$. Elle est impaire, strictement croissante, bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$. Sa réciproque est $\mathrm{argth} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, qui est donc également strictement croissante et impaire.

  La fonction th est utilisée dans certains réseaux de neurone comme fonction d'activation.

Sinus hyperbolique : sh



Graphe de la fonction sh, qui est symétrique par symétrie centrale par rapport à l'origine, et de argsh. Le graphe de la fonction ch est donnée pour référence.

Section 3

Limites d’une fonction

Enjeux pour les déf. des limites d'une fonction

Pour les suites, nous avons vu les définitions par quantificateurs des limites

- finies,
- valant $+\infty$,
- valant $-\infty$.

La seule localisation qui faisait sens pour la limite d'une suite u est en $+\infty$ ($n \to +\infty$).

Pour une application $f : D_f \to \mathbb{R}$, avec $D_f \subset \mathbb{R}$ satisfaisant (H), en plus des 3 types de limite, il y a en plus 3 types de localisation pour le passage à la limite

- en $x_0 \in \mathbb{R}$,
- en $+\infty$,
- en $-\infty$.

Cela va donc mener à écrire 9 définitions différentes pour décrire toutes ces situations !

Enjeux pour les déf. des limites d'une fonction

Example

Soit l'application $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x^2}$. Son domaine de définition $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ satisfait bien (H).
On peut considérer les limites de f en

- tout $x_0 \neq 0$ car $x_0 \in D_f$,
- mais aussi en $x_0 = 0$, car 0 est à la frontière d'au moins un des intervalles composant D_f,
- $-\infty$ et $+\infty$.

Hypothèses sur la localisation pour qu'une limite puisse faire sens

Qualitativement : pour considérer la limite d'une fonction en $x_0 \in \mathbb{R}$, resp. $+\infty$, resp. $-\infty$, il faut pouvoir "*s'approcher*" de x_0, resp. $+\infty$, resp. $-\infty$, tout en restant dans D_f.

Example

La fonction $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Il ne fait donc pas sens de considérer sa limite en -1 car il n'est pas possible "de faire tendre x vers -1 tout en restant dans D_f", idem pour une limite en $-\infty$...

Ces intuitions importantes recevront un sens mathématiques précis en L2 !

En MC1, nous allons faire des hypothèses simplificatrices.

Hypothèses sur la localisation pour qu'une limite puisse faire sens

Soit l'application $f : D_f \to \mathbb{R}$ avec D_f satisfaisant (H).
Nous ferons les hypothèses suivantes en fonction du type de localisation pour la limite considérée :

- limite en $x_0 \in \mathbb{R}$: $x_0 \in D_f$ ou x_0 est à la frontière d'au moins un intervalle contenu dans D_f,
- limite en $+\infty$: D_f contient un intervalle du type $[a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$,
- limite en $-\infty$: D_f contient un intervalle du type $]-\infty, a]$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Nous ne mentionnerons pas systématiquement ces hypothèses, qui seront alors implicitement supposées en fonction du type de limite étudiée.

Les 9 définitions de limite

Soit l'application $f : D_f \to \mathbb{R}$, D_f satisfaisant (H).
Ci-dessous les définitions des limites de f en x_0 valant ℓ, où $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

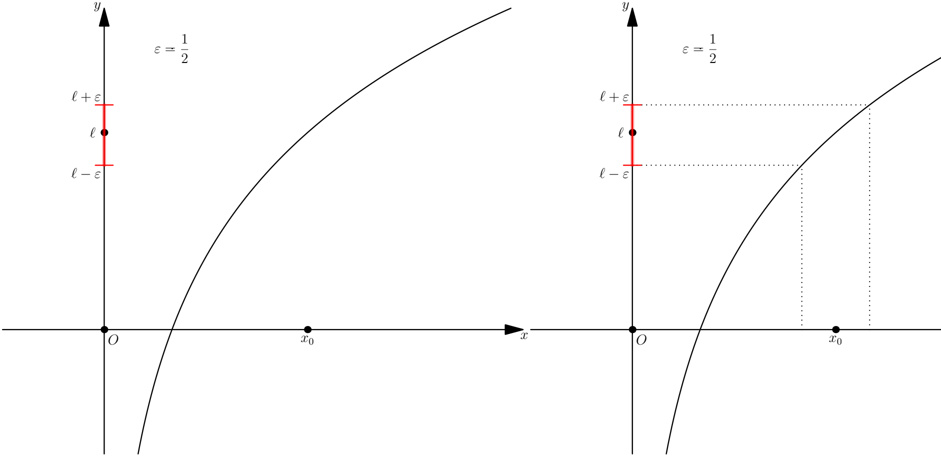
	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell = +\infty$	$\ell = -\infty$
$x_0 = +\infty$	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},$ $\forall x \in [B, +\infty[\cap D_f,$ $\lvert f(x) - \ell \rvert \leqslant \varepsilon.$	$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},$ $\forall x \in [B, +\infty[\cap D_f,$ $f(x) \geqslant A.$	$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},$ $\forall x \in [B, +\infty[\cap D_f,$ $f(x) \leqslant A.$
$x_0 = -\infty$	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},$ $\forall x \in]-\infty, B] \cap D_f,$ $\lvert f(x) - \ell \rvert \leqslant \varepsilon.$	$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},$ $\forall x \in]-\infty, B] \cap D_f,$ $f(x) \geqslant A.$	$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},$ $\forall x \in]-\infty, B] \cap D_f,$ $f(x) \leqslant A.$
$x_0 \in \mathbb{R}$	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,$ $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap D_f,$ $\lvert f(x) - \ell \rvert \leqslant \varepsilon.$	$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,$ $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap D_f,$ $f(x) \geqslant A.$	$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,$ $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap D_f,$ $f(x) \leqslant A.$

Les 9 définitions de limite

Remarque

Le cas de la limite finie, *i.e.* $\ell \in \mathbb{R}$, peut être étendu au cas où la fonction est à valeurs dans $\mathbb{C}$ (et donc $\ell \in \mathbb{C}$). La valeur absolue est alors remplacée par le module.

Illustration dans le cas $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$



La fonction f considérée ici admet pour limite ℓ en $x_0 \in D_f$. On note $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Exemple : $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

Notons que le domaine de définition naturel de la fonction $x \mapsto x^2$ est $\mathbb{R}$.
Il s'agit de montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in [0-\alpha, 0+\alpha], |x^2 - 0| \leqslant \varepsilon.$$

Exemple : $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

Il s'agit de montrer que

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\infty, B], x^2 \geqslant A.$$

Exemple : $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$

Notons que le domaine de définition naturel de la fonction $x \mapsto e^x$ est $\mathbb{R}$.
Il s'agit de montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in [-\alpha, \alpha], |e^x - 1| \leqslant \varepsilon.$$

Exemple : $\lim_{x \to 0} e^x = 1$

Catalogue de limites

On admet comme connu les différentes limites des fonctions suivantes

- puissances : $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$,
- exponentielle, logarithme,
- trigonométriques (et leurs réciproques).

Example

Des exemples (non exhaustifs) :

- $\lim_{x \to 0} x^\alpha = 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$ pour $\alpha > 0$; $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ si $n \in \mathbb{N}^*$ est pair,...
- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

Catalogue de limites

Example

- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty, \ \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty, \ldots$

Remarque

A partir de ces limites, nous pourrons obtenir des limites de fonctions plus complexes par assemblage grâce à diverses opérations (somme, produit, composition...).

Composition de limites

Proposition

Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ deux applications avec D_f et D_g satisfaisant (H). On suppose $f(D_f) \subset D_g$. Soient $x_0, \ell, \ell' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Si

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$,
- $\lim\limits_{x \to \ell} g(x) = \ell'$,

alors $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = \ell'$.

Démonstration.

Il y a $3^3 = 27$ cas différents à considérer en fonction des choix de x_0, ℓ, ℓ'. En exercice. □

Composition de limites

Example

- $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim_{x\to 0} e^x = 1$, donc par composition de limite $\lim_{x\to 0} e^{x^2} = 1$.
- $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ et $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, donc par composition de limites $\lim_{x\to 0} \ln(|\sin(x)|) = -\infty$.

  A noter que $x \mapsto \ln(|\sin(x)|)$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ ($\sin$ *s'annule), mais l'est par exemple sur $D =]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$.*

Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème (Caractérisation séquentielle de la limite)

Soit l'application $f : D_f \to \mathbb{R}$ avec D_f satisfaisant (H). Soient $x_0, \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. On a l'équivalence entre

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$,
2. *pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D_f de limite x_0, on a $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.*

Démonstration.

Il y a 9 preuves à écrire car 3 cas à étudier pour x_0 ainsi que pour ℓ. Résultat admis ! □

Caractérisation séquentielle limite : applications

Remarque

Cette caractérisation est très utile pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Example

Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = 0$ et $f(0) = 1$. Alors cette fonction n'admet pas de limite en 0.

Caractérisation séquentielle limite : applications

Remarque

Elle est aussi très utile d'un point de vue théorique !
Elle permet de ramener un problème d'étude de limite pour une fonction à l'étude de limites pour des suites. En voici une illustration.

Proposition (Unicité de la limite)

Soit l'application $f : D_f \to \mathbb{R}$ *avec* D_f *satisfaisant* (H). *Soit* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. *Si* f *admet une limite en* x_0, *alors cette limite est unique.*

Démonstration.

Supposons f admet limite en x_0, notée $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. *To be continued...* $\square$

Caractérisation séquentielle limite : applications

Démonstration.

Il s'agit de prouver les résultats suivants :

- si $\ell = +\infty$, f ne peut admettre $-\infty$ ou limite finie en x_0,
- si $\ell \in \mathbb{R}$, f ne peut admettre $+\infty$, ou $-\infty$, ou autre limite finie en x_0,
- si $\ell = -\infty$, f ne peut admettre $+\infty$ ou limite finie en x_0.

Beaucoup de cas à traiter ! Considérons uniquement $\ell \in \mathbb{R}$.
Par caractérisation séq. limite, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D_f qui tend vers x_0, on a $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, donc en particulier $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc ne peut tendre vers $\pm\infty$, donc on ne peut avoir $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Supposons par l'absurde que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell'$ avec $\ell' \in \mathbb{R}$, $\ell' \neq \ell$.

To be continued... $\square$

Caractérisation séquentielle limite : applications

Démonstration.

Soit u suite de D_f qui tend vers x_0, alors par caractérisation séq. limite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ'. Mais on sait déjà que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Or on a montré au chapitre précédent qu'une suite converge ne peut admettre deux limites finies différentes. Absurde ! Fin de la preuve. $\square$

Exercice 6

Faire les deux autres cas en exercice !

Caractérisation séquentielle limite : applications

Remarque

On montre grâce à la caractérisation que les autres résultats vus pour limites de suites sont aussi valables pour les fonctions :

- opérations sur les limites (sommation, produit, passage à l'inverse) finies et infinies,
- liens entre limites et inégalités (passage à la limite dans une inégalité, théorème d'encadrement),
- liens entre limites et monotonie (théorème limite monotone,...)

Dans la suite, on reprend ces résultats, sans recherche d'exhaustivité. En présence de plusieurs fonctions, on les supposera, pour simplifier, définies sur le même ensemble $D \subset \mathbb{R}$ satisfaisant (H).

Subsection 2

Opérations sur les limites de fonctions

Opérations sur les limites

Proposition

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux applications. Soient $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

- *Si f et g admettent limite finie en x_0, alors $f + g$ admet limite en x_0 qui est la somme des limites, fg admet limite en x_0 qui est le produit des limites, $\frac{f}{g}$ admet limite en x_0 qui est quotient des limites (attention à division par 0).*
- *Si f admet limite $\ell > 0$ et g limite $+\infty$ en x_0, alors $f + g$ et fg tendent vers $+\infty$ en x_0.*
- *Si f tend vers $+\infty$ en x_0, alors $\frac{1}{f}$ tend vers 0 en x_0.*
- *Si f strict. positive sur D et tend vers 0 en x_0 alors $\frac{1}{f}$ tend vers $+\infty$ en x_0.*
- *...*

Formes indéterminées

On a toujours les mêmes formes indéterminées dans le cas des fonctions :

- $(+\infty) - (+\infty)$.
- $(-\infty) - (-\infty)$.
- $(+\infty) + (-\infty)$.
- $0 \times \pm\infty$.
- $\frac{0}{0}$.
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Subsection 3

Limites et inégalités

Passage à la limite dans inégalité fonctionnelle

Proposition (Passage à la limite "dans $f \leqslant g$")

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux applications. Soient $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Supposons $f \leqslant g$ (i.e. $\forall x \in D, f(x) \leqslant g(x)$).

- *Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leqslant \ell'$.*
- *Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.*
- *Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.*

Exercice 7

Faire les démonstrations en utilisant la caractérisation séquentielle de la limite et les résultats associés vues dans le chapitre 3.

Exercice 8

Que valent les limites suivantes ? On précisera au préalable les domaines de définition choisis.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + \dfrac{\sin(x)}{2}$.
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} - \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x + \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)}$.
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} + \cos(x)$.
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(x) + x^2$.
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 + \cos(x))x^4$.
7. $\lim\limits_{x \to -\infty} (2 + \cos(x))x^3$.

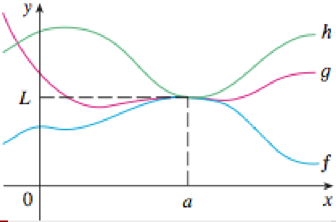
Théorème d'encadrement

Théorème (Théorème d'encadrement)

Soient $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, $h : D \to \mathbb{R}$ *trois applications. Soient* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *et* $\ell \in \mathbb{R}$.
Si

- $f \leqslant g \leqslant h$,
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$,

alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$.



Théorème d'encadrement

Exercice 10

Que valent les limites suivantes ? On précisera au préalable les domaines de définition considérés.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x^2}$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x)x^2$.
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \cos(x)x^3$. *Indication : on pourra utiliser le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leqslant x$.*

Exercice 11

Soient deux applications $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$. On suppose f bornée sur D et g admet limite nulle en $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Montrer à l'aide du théorème d'encadrement que $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = 0$.

Subsection 4

Limites et monotonie

Théorème de la limite monotone

Théorème (Théorème de la limite monotone)

Soit l'application $f : D_f \to \mathbb{R}$ avec D_f un intervalle ouvert. Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

1. *x_0 est l'extrémité droite de D_f.*
   - *Si f est croissante et majorée, alors f admet une limite finie en x_0.*
   - *Si f est décroissante et minorée, alors f admet une limite finie en x_0.*
2. *x_0 est l'extrémité gauche de D_f.*
   - *Si f est croissante et minorée, alors f admet une limite finie en x_0.*
   - *Si f est décroissante et majorée, alors f admet une limite finie en x_0.*

Théorème de la limite monotone

Example

Quelques exemples d'utilisation du résultat précédent.

- Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une application croissante et bornée. Alors f est minorée et majorée sur $]0,1[$ et d'après le thm de la limite monotone, f admet des limites finies en 0 et 1.
- Soit $f :]1,2[\to \mathbb{R}$ une application décroissante et majorée. Alors d'après le théorème de la limite monotone, f admet une limite finie en 1.
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application décroissante et minorée. Alors f admet une limite finie en $+\infty$.

Proposition

Soit l'application $f : D_f \to \mathbb{R}$ avec D_f un intervalle ouvert. Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

1. *x_0 est l'extrémité droite de D_f.*
   - *Si f est croissante et non majorée, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.*
   - *Si f est décroissante et non minorée, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.*
2. *x_0 est l'extrémité gauche de D_f.*
   - *Si f est croissante et non minorée, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.*
   - *Si f est décroissante et non majorée, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.*

Démonstration.

Supposons pour fixer les idées que $D_f =]-\infty, x_0[$ et que f est décroissante non minorée.

Objectif : montrer que $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, c'est-à-dire montrer que f satisfait l'assertion

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap D_f, f(x) \leqslant A.$$

Soit $A \in \mathbb{R}$.

- Comme f non minorée, il existe $x_1 \in D_f$ tel que $f(x_1) < A$. Notons que puisque $x_1 \in D_f$, on a $x_1 < x_0$ et $[x_1, x_0[\subset D_f$.
- Comme f croissante, pour tout $x \in [x_1, x_0[$, on a $f(x) \leqslant f(x_1)$, donc en particulier $f(x) \leqslant A$.

Posons $\eta = x_0 - x_1 > 0$. Alors

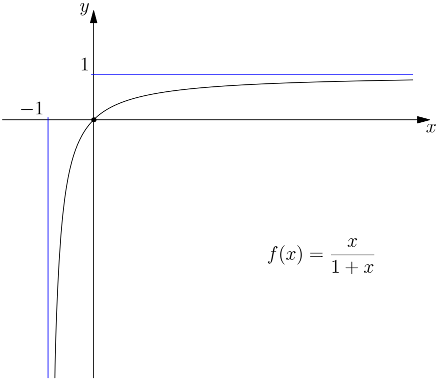
$$[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap D_f = [x_1, x_0 + \eta[\cap]-\infty, x_0[= [x_1, x_0[.$$

Ainsi on a bien prouvé que pour tout $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap D_f$, $f(x) \leqslant A$. □

Exercice 12
Entrainez vous en démontrant les autres cas de la proposition précédente.

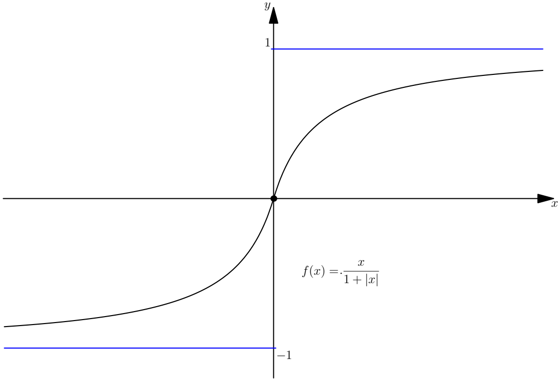
Par exemple, montrer que si l'application $f :]x_0, b[\to \mathbb{R}$ est décroissante et non majorée, alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Illustrations des résultats



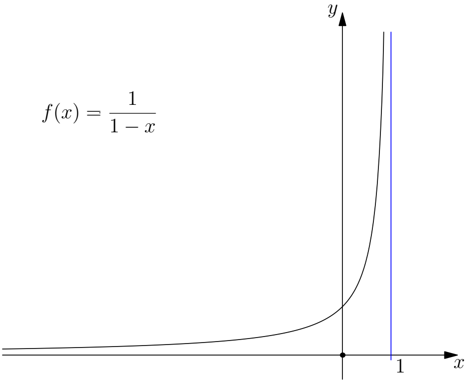
L'application $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, dont l'expression pour tout $x > -1$ est donnée sur la figure, est croissante non minorée et majorée. Par conséquent il est attendu, d'après le thm de la limite monotone, que f admette une limite finie en $+\infty$. De plus, par la proposition $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$.

Illustrations des résultats



L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dont l'expression pour tout $x \in \mathbb{R}$ est donnée sur la figure, est croissante bornée (prouver cette bornitude en exercice !). Par conséquent il est attendu, d'après le thm de la limite monotone, que f admette des limites finies en $\pm\infty$.

Illustrations des résultats



L'application $f :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$, dont l'expression pour tout $x < 1$ est donnée sur la figure, est croissante minorée et non majorée. Par conséquent il est attendu, d'après le thm de la limite monotone, que f admette une limite finie en $-\infty$. De plus, par la proposition $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

Section 4

Notations de Landau pour les fonctions - Négligeabilité et équivalence

Subsection 1

Fonctions négligeables - o

Fonctions négligeables

Definition

Soient $D \subset \mathbb{R}$ satisfaisant (H), $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et deux applications $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0, noté $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x))$, si

- il existe une application $\varepsilon : D \to \mathbb{R}$ t.q. $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$,
- il existe I un intervalle satisfaisant
  - si $x_0 \in \mathbb{R}$: $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ avec $\alpha > 0$,
  - si $x_0 = +\infty$: $I = [B, +\infty[$ avec $B \in \mathbb{R}$,
  - si $x_0 = -\infty$: $I =]-\infty, B]$ avec $B \in \mathbb{R}$.

  et t.q. pour tout $x \in I \cap D$, $f(x) = \varepsilon(x) g(x)$.

Fonctions ne s'annulant pas dans un voisinage

Definition (Non nul localement en x_0)

Soit l'application $f : D_f \to \mathbb{R}$ avec D_f satisfaisant (H). Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. On dira que f est non nulle dans voisinage de x_0, s'il existe I un intervalle du type

- si $x_0 \in \mathbb{R}$: $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ avec $\alpha > 0$,
- si $x_0 = +\infty$: $I = [B, +\infty[$ avec $B \in \mathbb{R}$,
- si $x_0 = -\infty$: $I =]-\infty, B]$ avec $B \in \mathbb{R}$.

et t.q. pour tout $x \in I \cap D_f$, $f(x) \neq 0$.

Fonctions ne s'annulant pas dans un voisinage

Example

- L'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (x-1)^2$ est non nulle dans un voisinage de 0 car pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $f(x) \neq 0$ (on a pris ici $\alpha = \frac{1}{2}$, mais n'importe quel $\alpha \in]0, 1[$ convient).
- L'application $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x} - 2$ ne s'annule pas dans un voisinage de $+\infty$, car pour tout $x \in [5, +\infty[$, $f(x) \neq 0$.

Exercice 13

Montrer que l'application $\sin$, définie sur $\mathbb{R}$, ne vérifie pas la propriété de ne pas s'annuler dans un voisinage de $+\infty$.

Remarque

On peut définir plus généralement qu'une fonction satisfait une propriété P dans un voisinage de x_0. Dans la définition précédente, P étant "ne pas s'annuler".

Fonctions négligeables

Proposition

Soient $D \subset \mathbb{R}$ satisfaisant (H), $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et deux applications $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$. On suppose que g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0. Alors :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

Démonstration.

($\Rightarrow$) Traitons le cas $x_0 \in \mathbb{R}$. Les autres en exo ! Comme $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x))$, il existe $\varepsilon : D \to \mathbb{R}$ de lim. nulle en x_0 et $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap D$, $f(x) = \varepsilon(x) g(x)$.
Suite de la preuve slide suivante. $\square$

Fonctions négligeables

Démonstration.

Comme g non nulle dans un voisinage de x_0, il existe $\alpha' > 0$ tel que pour tout $x \in [x_0 - \alpha', x_0 + \alpha'] \cap D$, $g(x) \neq 0$.
Soit $\alpha'' = \min(\alpha, \alpha') > 0$. Alors pour tout $x \in [x_0 - \alpha'', x_0 + \alpha''] \cap D$, on a

- $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$, car $\alpha'' \leqslant \alpha$,
- $g(x) \neq 0$, car $\alpha'' \leqslant \alpha'$,

donc $\frac{f(x)}{g(x)} = \varepsilon(x)$. Comme ε tend vers 0 en x_0, c'est donc aussi le cas de $\frac{f}{g}$.
($\Leftarrow$) Idée : on construit une fonction ε d'abord sur $[x_0 - \alpha', x_0 + \alpha'] \cap D$ en posant $\varepsilon = \frac{f}{g}$ (g ne s'annule pas sur ce domaine par hyp., on reprend les notations précédentes), puis $\varepsilon(x) = 0$ pour $x \in D \setminus [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$. On a ε limite nulle en x_0 et $f = \varepsilon g$ sur $[x_0 - \alpha', x_0 + \alpha'] \cap D$. □

Remarque

Si $\forall x \in D$ $g(x) \neq 0$, alors la preuve est bien plus simple !
Exercice

Lien entre fonctions négligeables et suites négligeables

Proposition (Caractérisation séquentielle négligeabilité)

Soient $D \subset \mathbb{R}$ satisfaisant (H), $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et deux applications $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$. On a l'équivalence entre

- $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x))$,
- *pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D et de limite x_0, on a $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{=} o(g(u_n))$.*

Démonstration.

Cela repose sur la caractérisation séquentielle de la limite.
Admis. □

Opérations sur les o

Proposition

Les opérations de

- *transitivité,*
- *combinaison linéaire,*
- *produit,*
- *puissance,*
- *inverse,*

vues pour les suites au chapitre précédent sont valables dans le contexte des fonctions.

Démonstration.

Soit on retourne à la définition de o, soit on utilise la caractérisation séquentielle de la négligeabilité et les résultats établis pour les suites au chapitre précédent. □

Comparaisons classiques - Croissances comparées

Proposition

Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\lambda > 1$, alors

$$(\ln(x))^{\alpha} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^{\beta}\right), \quad x^{\beta} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\lambda^{x}\right).$$

Démonstration.

Admis. $\square$

Comparaisons classiques - Croissances comparées

Remarque

L'affirmation $x^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\lambda^x\right)$ se réécrit également $x^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{\gamma x}\right)$, puisque $\lambda^x = e^{\gamma x}$ pour $\gamma = \ln(\lambda) > 0$.

Corollaire

Soient $\beta > 0$, $\gamma > 0$, alors $e^{-\gamma x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$.

Démonstration.

On sait que si $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\,(g(x))$ pour $f, g : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, alors $\frac{1}{g(x)} \underset{x\to x_0}{=} o\left(\frac{1}{f(x)}\right)$. On applique cette propriété à $x^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{\gamma x}\right)$. □

Comparaisons classiques - Croissances comparées

Corollaire

Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\lambda > 1$, *alors* $\lim_{x\to 0} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0$, *i.e.*

$$|\ln(x)|^\alpha = \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x^\beta}\right).$$

Démonstration.

Soit $g : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{|\ln(t)|^\alpha}{t^\beta}$. Par la prop., $\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$. L'appli $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$ et $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^* = D_g$. Par composée de limites, on a donc $\lim_{x\to 0} g\circ f(x) = 0$. Or pour $x > 0$, $g(f(x)) = \frac{\left|\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right|^\alpha}{\left(\frac{1}{x}\right)^\beta} = x^\beta|-\ln(x)|^\alpha = x^\beta|\ln(x)|^\alpha$. D'où la limite affirmée par le corollaire. □

Subsection 2

Équivalence

Fonctions équivalentes

Definition

Soient $D \subset \mathbb{R}$ satisfaisant (H), $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et deux applications $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$. On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0, noté $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$, si

- il existe une application $\delta : D \to \mathbb{R}$ t.q. $\lim\limits_{x \to x_0} \delta(x) = 1$,
- il existe I un intervalle satisfaisant
  - si $x_0 \in \mathbb{R}$: $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ avec $\alpha > 0$,
  - si $x_0 = +\infty$: $I = [B, +\infty[$ avec $B \in \mathbb{R}$,
  - si $x_0 = -\infty$: $I =]-\infty, B]$ avec $B \in \mathbb{R}$.

  et t.q. pour tout $x \in I \cap D$, $f(x) = \delta(x) g(x)$.

Remarque

On a $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ ssi $f(x) = g(x) + \underset{x \to x_0}{o}(g(x))$.

Fonctions équivalentes

Proposition

Soient $D \subset \mathbb{R}$ satisfaisant (H), $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et deux applications $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$. On suppose que g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0. Alors :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 1.$$

Démonstration.

La preuve est la même que pour la négligeabilité. Il faut juste remplacer ε par δ et la limite nulle devient une limite valant 1.

$\square$

Lien entre fonctions négligeables et suites négligeables

Proposition (Caractérisation séquentielle équivalence)

Soient $D \subset \mathbb{R}$ satisfaisant (H), $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et deux applications $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$. On a l'équivalence entre

- $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$,
- *pour toute suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *d'éléments de* D *et de limite* x_0, *on a* $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} g(u_n)$.

Démonstration.

Cela repose sur la caractérisation séquentielle de la limite.
Admis. □

Opérations sur les équivalents

Proposition

Les opérations de

- *réflexivité,*
- *symétrie,*
- *transitivité,*
- *produit,*
- *produit d'équivalents,*
- *puissance,*
- *inverse,*

vues pour les suites au chapitre précédent sont valables dans le contexte des fonctions.

Démonstration.

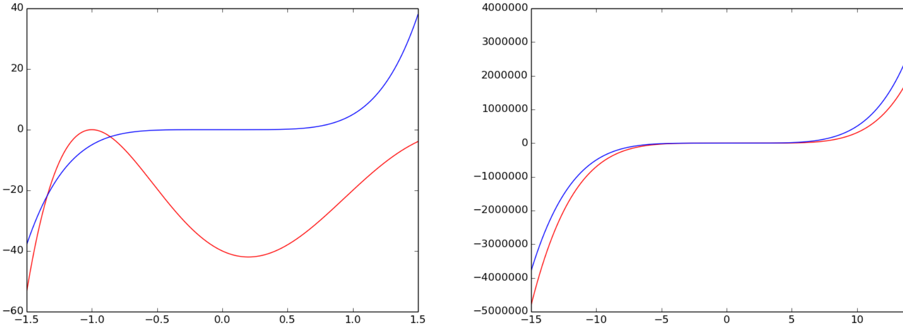
Soit on retourne à la définition de $\underset{x \to x_0}{\sim}$, soit on utilise la caractérisation séquentielle de l'équivalence et les résultats établis pour les suites au chapitre précédent. □

Exemples

Example

- On a $x + x^2 + x^3 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^3$ et $x + x^2 + x^3 \underset{x \to 0}{\sim} x$.
- On a $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$.
- $\frac{\sqrt{x^2+1}}{\ln(x^2+1)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x}{2\ln(x)}$.
- Si $P : x \in \mathbb{R} \mapsto a_p x^p + \ldots + a_1 x + a_0$ et $Q : x \in \mathbb{R} \mapsto b_q x^q + \ldots + b_1 x + b_0$, avec $a_p, \ldots, a_0, b_q, \ldots, b_0 \in \mathbb{R}$, $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$. Alors $P(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} a_p x^p$ et $Q(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} b_q x^q$. D'où $\frac{P(x)}{Q(x)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{a_p}{b_q} x^{p-q}$. Idem lorsque $x \to -\infty$.

Illustration graphique de $P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_p x^p$



Graphes de $P : x \in \mathbb{R} \mapsto 5x^5 - 20x^4 + 5x^3 + 50x - 40$ en rouge et $Q : x \in \mathbb{R} \mapsto 5x^5$ en bleu sur des domaines de plus en plus grand. Plus $|x|$ est grand, plus l'allure des graphes se comportent de la même manière.

Application : détermination limite d'une fonction

Proposition

Soient $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ deux applications avec D satisfaisant (H). Soient $x_0, \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Supposons que

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x).$$

Alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$.

Démonstration.

De nouveau ce résultat peut se prouver grâce à la caractérisation séquentielle de l'équivalence et le résultat associé démontré pour les suites. Sinon on peut retourner à la définition. □

Example

Trouver, si elle existe, la limite en 0 de

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{x^2\ln(x)}{x^4 + x\cos(x)} + \frac{x + \sqrt{x|\ln(x)|}}{1 + \sqrt{|\ln(x)|}}\right).$$

Notons que le domaine de définition naturel de f est $D_f = \mathbb{R}_+^*$.
Il est donc légitime de considérer la limite de f en 0.

On raisonne "bloc par bloc".

- On a $x^4 + x\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc par quotient d'équivalents $\frac{x^2\ln(x)}{x^4+x\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(x)$.

Example

Trouver, si elle existe, la limite en 0 de

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{x^2\ln(x)}{x^4 + x\cos(x)} + \frac{x + \sqrt{x|\ln(x)|}}{1 + \sqrt{|\ln(x)|}}\right).$$

- Par composée de limite, on a $\sqrt{|\ln(x)|} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$, donc $1 + \sqrt{|\ln(x)|} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{|\ln(x)|}$.
- pour $x > 0$, $x + \sqrt{x|\ln(x)|} = \sqrt{x|\ln(x)|}\left(\sqrt{\frac{x}{|\ln(x)|}} + 1\right)$. Or $\sqrt{\frac{x}{|\ln(x)|}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, d'où $x + \sqrt{x|\ln(x)|} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x|\ln(x)|}$.
- Par quotient d'équivalents, $\frac{x+\sqrt{x|\ln(x)|}}{1+\sqrt{|\ln(x)|}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{x|\ln(x)|}}{\sqrt{|\ln(x)|}} = \sqrt{x}$.

Example

Trouver, si elle existe, la limite en 0 de

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{x^2\ln(x)}{x^4 + x\cos(x)} + \frac{x+\sqrt{x|\ln(x)|}}{1+\sqrt{|\ln(x)|}}\right).$$

- On a donc

$$\frac{x^2\ln(x)}{x^4 + x\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(x) \quad \text{et} \quad \frac{x+\sqrt{x|\ln(x)|}}{1+\sqrt{|\ln(x)|}} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}.$$

  Mais on ne peut sommer des équivalents ! On retourne aux "o".

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(x\ln(x) + \underset{x\to 0}{o}(x\ln(x)) + \sqrt{x} + \underset{x\to 0}{o}\left(\sqrt{x}\right)\right)$. Or $x\ln(x) = \underset{x\to 0}{o}\left(\sqrt{x}\right)$, donc $x\ln(x) + \underset{x\to 0}{o}(x\ln(x)) = \underset{x\to 0}{o}\left(\sqrt{x}\right)$ et donc $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} + \underset{x\to 0}{o}\left(\sqrt{x}\right)\right) = 1 + \underset{x\to 0}{o}(1)$.
  D'où $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Exercice 14

Déterminer les limites suivantes. On précisera bien au préalable les domaines de définition naturel des fonctions impliquées.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+2}{x^2\ln(x)}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} 2x\ln(x)+\sqrt{x}$.
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+4x-1}{x\ln(x)}$.
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$.
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x-e^{x^2}}{x^2-x}$.

Exercice 15

Déterminer les limites suivantes. On précisera bien au préalable les domaines de définition naturel des fonctions impliquées.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}-x$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp\left(\sqrt{x}-x\right)$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2\ln(x+1)-\ln(x^2+1)\right)$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$.

Section 5

Continuité

Définition de la continuité

Definition (Continuité ponctuelle, globale)

Soit l'application $f : D_f \to \mathbb{R}$, D_f satisfaisant (H). Soit $x_0 \in D_f$.
On dira que f est continue en x_0 ssi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap D_f, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

On dira que f est continue sur D_f si f est continue en chacun des éléments de D_f.

Soit $D \subset \mathbb{R}$ satisfaisant (H). L'ensemble des applications continues sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{C}^0(D, \mathbb{R})$.

Proposition

On peut montrer que les fonctions usuelles sont toutes continues sur leur domaine de définition naturel.

Subsection 2

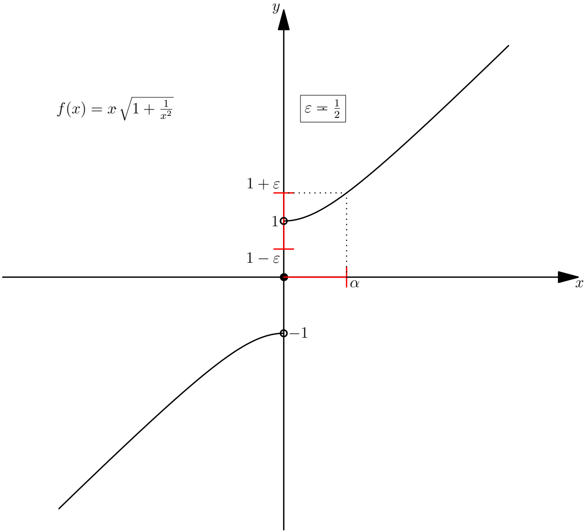
Limites à gauche et à droite, lien avec la continuité

Définition limites à gauche et à droite en $x_0 \in \mathbb{R}$

Soit l'application $f : D_f \to \mathbb{R}$, D_f satisfaisant (H).
Ci-dessous les déf. des limites de f en $x_0 \in \mathbb{R}$, à gauche et à droite, valant $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On note respectivement $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$.

Idée : on s'approche de x_0 uniquement par la gauche ou par la droite.

	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell = +\infty$	$\ell = -\infty$
$x_0 \in \mathbb{R}$ à gauche	$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,$ $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0[\cap D_f,$ $\lvert f(x) - \ell \rvert \leqslant \varepsilon.$	$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0,$ $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0[\cap D_f,$ $f(x) \geqslant A.$	$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0,$ $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0[\cap D_f,$ $f(x) \leqslant A.$
$x_0 \in \mathbb{R}$ à droite	$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,$ $\forall x \in]x_0, x_0 + \alpha] \cap D_f,$ $\lvert f(x) - \ell \rvert \leqslant \varepsilon.$	$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0,$ $\forall x \in]x_0, x_0 + \alpha] \cap D_f,$ $f(x) \geqslant A.$	$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0,$ $\forall x \in]x_0, x_0 + \alpha] \cap D_f,$ $f(x) \leqslant A.$



La fonction f dont l'expression est donnée ci-dessus admet des limites à gauche et à droite en 0.

Limites à gauche et à droite

Remarque

Comme pour les limites de f en $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, dans la suite, quand on parle d'une limite de f à gauche ou à droite en x_0, on suppose implicitement qu'il est légitime de les considérer, i.e. que $]x_0 - 1, x_0[\cap D_f \neq \emptyset$ ou $]x_0, x_0 + 1[\cap D_f \neq \emptyset$.

Example

Il ne fait pas sens de considérer la limite à gauche de $\ln$ en 0 puisque on ne peut pas s'approcher de 0 par la gauche tout en restant dans $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque

Toutes les règles vues précédemment pour les limites sont valables pour les limites à gauche et à droite (opérations, composition, limites et inégalités, limites et monotonie).

Limites à gauche et à droite

Example

- La limite à gauche de E en $k \in \mathbb{Z}$ vaut $k-1$. Sa limite à droite en $k \in \mathbb{Z}$ vaut k.

- La limite à gauche en 0 de $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x^3}$ vaut $-\infty$.

Exercice 16

Déterminer les limites à gauche et à droite suivantes. On précisera les domaines de définition naturel.

1. $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x}{|x|}$.
2. $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x}{|x|}$.
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\frac{1}{x}}$.
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{\frac{1}{x}}$.
5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\frac{1}{|x|}}$.
6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{\frac{1}{|x|}}$.
7. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x^2+3|x|}{x}$.
8. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{x^2+3|x|}{x}$.
9. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{1+\dfrac{1}{x}} - \sqrt{\dfrac{1}{x}}$.

Lien entre limites à gauche et à droite en x_0 et limite en x_0

Proposition

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ avec D_f satisfaisant (H). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il fait sens de considérer des limites à gauche et à droite de f en x_0. Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. On a l'équivalence entre

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$,
2. *f admet des limites à gauche et à droite en x_0 et elles valent ℓ.*

Démonstration.

Limites à gauche, droite et continuité

Proposition

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ avec D_f satisfaisant (H). Soit $\underline{x_0 \in D_f}$. On a l'équivalence entre

1. *f est continue en x_0,*
2. *f admet des limites à gauche et à droite en x_0 et valent $f(x_0)$.*

Démonstration.

Par définition f est $\mathcal{C}^0$ en x_0 ssi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Or par la proposition précédente, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ssi f admet des limites à gauche et à droite en x_0 et elles sont égales à $f(x_0)$.

$\square$

Limites à gauche, droite et continuité

Example

- La fonction E n'est pas continue en tout $k \in \mathbb{Z}$, car admet des limites à gauche et à droite en k mais non égales.
- L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q. pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = 0$ et $f(0) = 1$ n'est pas continue en 0 car elle n'admet pas de limite en 0 (déjà vu). Une autre démonstration consiste à montrer que f admet des limites à gauche et à droite en 0 valant 0, mais donc non égales à $f(0) = 1$.

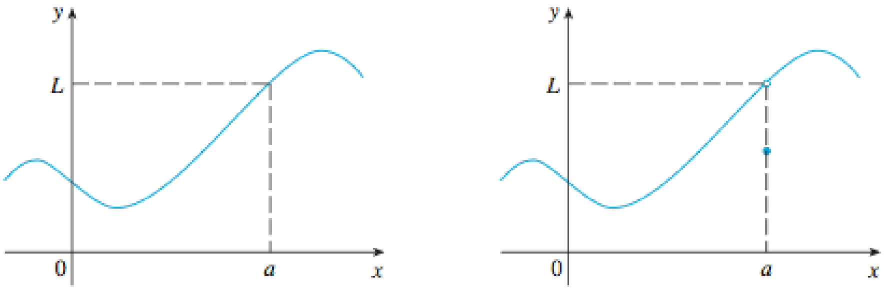


Figure de gauche : f est continue en a ($\lim_a f = L = f(a)$).
Figure de droite : on a modifié la fonction f seulement en a pour définir une nouvelle fonction g. La fonction g n'est pas continue en a car g n'admet pas de limite en a ou (autre justification) g admet des limites à gauche et à droite en a valant L mais non égales à $g(a)$.

Subsection 3

Opérations sur les fonctions continues

Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème

Soit l'application $f : D_f \to \mathbb{R}$, avec D_f satisfaisant (H). Soit $x_0 \in D_f$. On a l'équivalence entre

1. *f est continue en x_0,*
2. *pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D_f convergeant vers x_0, on a $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.*

Démonstration.

Par définition on sait que f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, ce qui est équivalent à 2. par la caractérisation séquentielle de la limite ! $\square$

Caractérisation séquentielle de la continuité

Corollaire

Soit l'application $f : D_f \to \mathbb{R}$, avec D_f satisfaisant (H). On suppose $f(D_f) \subset D_f$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $u_0 \in D_f$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si :

1. *u converge vers $\ell \in D_f$,*
2. *f est continue en ℓ,*

alors $\ell = f(\ell)$. On dit que ℓ est un point fixe de f.

Démonstration.

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in D_f$. Ainsi u est à valeurs dans D_f, CV vers $\ell \in D_f$ et f continue en ℓ, donc par caractérisation séquentielle de la continuité, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers $f(\ell)$. Or $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers ℓ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Par unicité de la limite d'une suite convergente, on obtient $\ell = f(\ell)$. □

Application de la caractérisation séq. continuité

Example

Soit la suite réelle u définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$. On admet que u est convergente (**le prouver en exercice**). Notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite.

L'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x^2+1}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, donc en particulier continue en ℓ. D'après le corollaire précédent de la caractérisation séquentielle de la continuité, comme u CV vers ℓ, on a $\ell = f(\ell)$.
En résolvant l'équation, on trouve $\ell = 1$.

Proposition

Les sommes, différences, produits, quotients et composées de fonctions continues sont continues sur leur domaine de définition.

Démonstration.

Ces propriétés peuvent se démontrer grâce à la caractérisation séquentielle de la continuité et les propriétés vraies pour le suites. Sinon on se base sur les propriétés déjà montrées pour les limites de fonctions. □

Example

La fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x^2+1}$ est définie sur $D_f = [1, +\infty[$.

- $x \mapsto x+1$ est continue sur D_f d'image inclue dans $\mathbb{R}_+$ et $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc par composée $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur D_f,
- de même $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est continue sur D_f,
- $h : x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ est donc continue sur D_f par différence de fonctions continues sur D_f,
- $g : x \mapsto x^2+1$ est continue sur D_f,

donc par quotient des fonctions continues (sur D_f) h et g, avec $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in D_f$, on obtient f continue sur D_f.

Exercice 17

Raisonner de la même manière pour justifier que $f : x \mapsto \frac{e^x - \sin(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Subsection 4

Prolongement par continuité

Prolongement d'une fonction

Definition

Soient E, F deux ensembles quelconques, $f : E \rightarrow F$ une application. On appelle prolongement de f, toute application $g : \tilde{E} \rightarrow F$ telle que

- $\tilde{E}$ est un ensemble satisfaisant $E \subset \tilde{E}$ et $E \neq \tilde{E}$,
- $\forall x \in E, g(x) = f(x)$.

Remarque

La fonction g *étend* (prolonge) f a un ensemble $\tilde{E}$ plus grand.

Exemples de prolongements

Example

Soit l'application $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(x)$. Les applications

- $g_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\forall x > 0$, $g_1(x) = f(x)$ et $g_1(0) = \pi$,
- $g_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\forall x > 0$, $g_2(x) = f(x)$ et $g_2(0) = -1$,
- $g_3 : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $\forall x > 0$, $g_3(x) = f(x)$ et $\forall x \in [-1, 0]$, $g_3(x) = \sin(x)$,
- $g_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall x > 0$, $g_4(x) = f(x)$ et $\forall x \leqslant 0$, $g_4(x) = \text{sh}(x)$,

sont des prolongements de f.

Prolongement par continuité

Definition

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, D_f satisfaisant (H). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 \notin D_f$. Si f admet en x_0 une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors on appelle prolongement par continuité de f en x_0, le prolongement de f à $D_f \cup \{x_0\}$ définie par

$$g : x \in D_f \cup \{x_0\} \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in D_f, \\ \ell, & x = x_0. \end{cases}$$

Example

- Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$, une appli. admettant une limite finie ℓ en 0. Alors le prolongé par continuité de f en 0 est l'appli. $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ t.q. $g_{|]0,1]} = f$ et $g(0) = \ell$.
- Soit l'appli. $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto 0$. On montre que $\lim_0 f = 0$, donc le prolongement par continuité de f en 0 est l'appli. nulle définie sur $\mathbb{R}$.

Le prolongement par continuité est continue

Proposition

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, D_f satisfaisant (H). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 \notin D_f$. On suppose que f admet en x_0 une limite $\ell \in \mathbb{R}$, et on considère g son prolongement par continuité en x_0. Alors g est continue en x_0.

Remarque

Explication de l'appellation *le prolongement par continuité de f en x_0*.

- *le* : il n'y a qu'un seul prolongement de f à $D_f \cup \{x_0\}$ définie par $g(x_0) = \ell$,
- *prolongement* : g est par déf. un prolongement,
- *en x_0* : f est étendue à $D_f \cup \{x_0\}$,
- *par continuité* : g est continue en x_0.

Démonstration.

Preuve de la proposition. On a $x_0 \in D_g = D_f \cup \{x_0\}$. Il s'agit de montrer $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. Retournons à la définition, il suffit de vérifier que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap D_g, |g(x) - g(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap D_f$, on a $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
On a

$$\begin{aligned}
[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap D_g &= [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap (D_f \cup \{x_0\}), \\
&= ([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap D_f) \cup ([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap \{x_0\}), \\
&= ([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap D_f) \cup \{x_0\}.
\end{aligned}$$

Suite à la slide suivante. □

Démonstration.

Soit $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap D_g$. On a donc

- $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap D_f$, et alors on sait que $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Or dans ce cas $g(x) = f(x)$, car $x \in D_f$, et $g(x_0) = \ell$ d'où $|g(x) - g(x_0)| \leqslant \varepsilon$,
- ou $x = x_0$, dans ce cas $g(x) = g(x_0)$, donc de nouveau $|g(x) - g(x_0)| \leqslant \varepsilon$.

On a bien prouvé que l'on a toujours $|g(x) - g(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$, g est continue en x_0. $\square$

Example

- L'appli. $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x\ln(x)$, qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$, se prolonge par continuité en 0 car $\lim_0 f = 0$. Notons g le prolongement par continuité en 0 de f. Ainsi g est continue sur $\mathbb{R}_+$ car
  - g est continue en 0,
  - g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car vaut f sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit l'appli. $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. On a
  - $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc par composée $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$,
  - $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}^*$,

  donc par produit f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
  On a pour tout $x \neq 0$, $0 \leqslant |f(x)| = |x|\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x|$. Donc par le théorème d'encadrement, $\lim_0 |f| = 0$, d'où $\lim_0 f = 0$.
  Ainsi f se prolonge par continuité en 0, et son prolongé par continuité est continue sur $\mathbb{R}$.

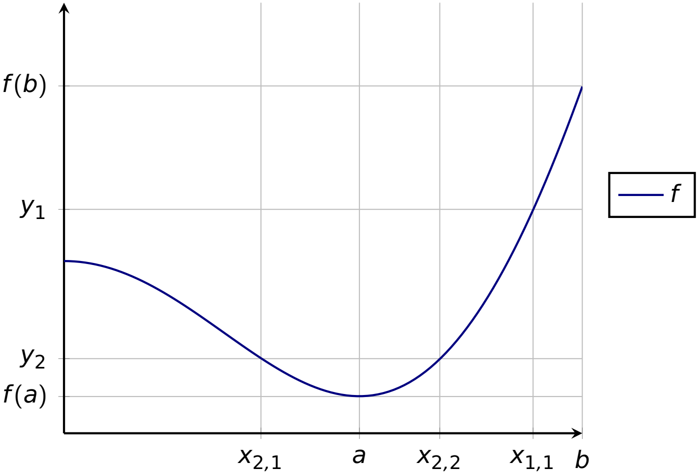
Exercice 18

Étudier le prolongement par continuité des fonctions suivantes. On précisera bien au préalable le domaine de définition naturel.

- $f : x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$.
- $g : x \mapsto e^x + \frac{1}{e + \ln(|x|)^2}$.

Subsection 5

Interaction entre la continuité et la notion d'intervalle



La fonction f est continue sur l'intervalle $[0, b]$. On remarque que pour tout $y \in \mathbb{R}$ satisfaisant $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, il existe au moins un $x \in [0, b]$ tel que $y = f(x)$. Il n'y a pas de "trou" dans le graphe d'une fonction continue sur un intervalle.

TVI

Théorème (des valeurs intermédiaires (TVI))

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue sur I. Soient $a, b \in I$. Supposons pour fixer les idées que $f(a) \leqslant f(b)$. Alors pour tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, il existe $x \in I$ tel que $y = f(x)$.

Remarque

Les hypothèses de continuité et que le domaine de définition considéré est un intervalle sont toutes les deux fondamentales ! Si l'une de ces hypothèses disparaît, alors la conclusion devient fausse.
Ce résultat permet entre autre de justifier la surjectivité de certaines applications continues.

TVI