

Licence 1ère année Mathématiques et Calcul 1

Quentin Denoyelle
quentin.denoyelle@u-paris.fr

(avec la collaboration de A. Chambaz, L. Moisan et F. Benaych)

UFR de Mathématiques et Informatique
Université Paris Cité, Campus Saint-Germain-des-Près

16 octobre 2025

Chapitre 3 : Suites Réelles ou Complexes

1 Premières définitions - Généralités

- Qu'est-ce qu'une suite ?
- Manières classiques de définir une suite
- Propriétés de base sur les suites

2 Convergence des suites

- Définitions et 1-ères propriétés autour de la convergence
- Opérations sur les limites
- Limites et inégalités

Section 1

Premières définitions - Généralités

Définition d'une suite

Définition

Soit E un ensemble. Une suite à valeurs dans E est une application de $\mathbb{N}$ dans E .

Notations. Soit $u : \mathbb{N} \rightarrow E$ une suite. Pour $n \in \mathbb{N}$, on notera u_n plutôt que $u(n)$, et la suite u sera souvent notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. L'ensemble des suites à valeurs dans E est noté $E^{\mathbb{N}}$.

Remarque

- ▶ Une application de $\mathbb{N}^*$ dans E sera aussi considéré comme une suite. On notera $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- ▶ Quand $E = \mathbb{R}$, on parlera de suites **réelles**. Et si $E = \mathbb{C}$, de suites **complexes**. On parlera de suites **numériques** si E est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition d'une suite

Vocabulaire.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E un ensemble.

- ▶ Pour faire référence à la suite, on dira **la suite u** ou **la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$** .
- ▶ Pour $n \in \mathbb{N}$, u_n est appelé un **terme** de la suite u , ou le terme de rang n de la suite u .
- ▶ $u(\mathbb{N}) = \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ est l'**image** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Attention. Ne pas confondre :

Définition d'une suite

Exercice 1

Soit la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$. Effectuer les associations appropriées, quand c'est possible, entre la colonne de gauche et celle de droite.

- | | |
|--|--|
| a) La suite u . | 1. 1. |
| b) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'image de $2n^2$. | 2. $1, -1$. |
| c) L'image de u . | 3. $u : n \in \mathbb{N} \mapsto u_n$. |
| d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Le terme de rang $n + 4$ de u . | 4. $\{1\}$. |
| e) L'image de $2\mathbb{N}$ par u . | 5. $n \in \mathbb{N} \mapsto (-1)^{n+4}$. |
| f) L'ensemble des antécédents de 1 par u . | 6. -1 . |
| g) L'image de $\{1, 7, 7^2\}$ par u . | 7. u_n . |
| h) La valeur de u_0 . | 8. $\{-1, 1\}$. |
| | 9. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$. |
| | 10. $\{-1\}$. |

Définition d'une suite

Exemple

Des exemples de suites.

- ▶ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 1$.
- ▶ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e^{\frac{i\pi}{n}}$.
- ▶ $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = X^2 - nX + n^2$.
- ▶ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(nx)$.

Dans toute la suite du cours, nous ne considérerons que des **suites numériques** (à valeurs réelles ou complexes).

Suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$

On peut définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de manière **explicite** où chaque terme u_n , pour $n \in \mathbb{N}$, est défini directement à partir d'une expression dépendant de n .

Exemple

Voir tous les exemples de la slide précédente. Ou encore les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$

- ▶ $u_n = (-1)^n$,
- ▶ $u_n = \frac{1+i}{1+2^n}$,
- ▶ $u_n = \sum_{k=1}^n k^2$.
- ▶ etc...

Suites récurrentes

Definition

On dira que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs complexes) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Dans ce cas, la suite u est entièrement caractérisée par la donnée de f et u_0 .

Remarque

La récurrence définissant u peut dépendre de plus de termes que juste le précédent. Par exemple si :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$, alors on parle de suite récurrente d'ordre 2.

Définition d'une suite par récurrence

Exemple

- ▶ La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.
- ▶ La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Collatz / de Syracuse : $u_0 \in \mathbb{N}^*$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \begin{cases} u_n/2, & \text{si } u_n \text{ est pair,} \\ 3u_n + 1, & \text{si } u_n \text{ est impair.} \end{cases}$$

- ▶ La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Fibonacci : $u_0 = 0, u_1 = 1$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Suites arithmétiques

Definition

Une suite arithmétique, de terme initial $a \in \mathbb{R}$ et de raison $r \in \mathbb{R}$, est définie par :

1. $u_0 = a$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x + r$.

Remarque

On peut définir exactement la notion dans le cas complexe, avec $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{C}$ et $f : z \in \mathbb{C} \mapsto z + r$.

Proposition

Soit une telle suite u . Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.

Démonstration.

Suites géométriques

Definition

Une suite géométrique, de terme initial $a \in \mathbb{R}$ et de raison $q \in \mathbb{R}$, est définie par :

1. $u_0 = a$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \in \mathbb{R} \mapsto qx$.

Remarque

On peut définir exactement la notion dans le cas complexe, avec $a \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{C}$ et $f : z \in \mathbb{C} \mapsto qz$.

Proposition

Soit une telle suite u . Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$.

Démonstration.

Suites géométriques

Proposition

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Démonstration.

Suites constantes et périodiques

Definition

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

- ▶ constante si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$,
- ▶ périodique s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n$. La valeur p est alors une **période** et la plus petite période est appelée **période fondamentale**.

Exercice 2

Montrer qu'une suite constante est périodique.

Exercice 3

Montrer que la suite $\left(e^{\frac{2ik\pi}{3}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique. Quelle est sa période fondamentale ? Quelle est l'image de cette suite ?

Monotonie

Definition

On dit qu'une suite **réelle** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

- ▶ croissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$,
- ▶ strictement croissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$,
- ▶ décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$,
- ▶ strictement décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$,
- ▶ monotone si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est soit croissante, soit décroissante,
- ▶ strictement monotone si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

Monotonie

Il y a deux méthodes classiques pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Méthode 1. Étudier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Méthode 2. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, étudier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

- ▶ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante,
- ▶ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Monotonie

Exemple

- ▶ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -3n + 2$, est strictement décroissante.
- ▶ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n+1}$, est strictement décroissante.
- ▶ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = E\left(\frac{n}{2}\right)$, est croissante.
- ▶ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$, n'est pas monotone.
- ▶ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(20 - n)$, n'est pas monotone.
- ▶ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n}$, est croissante.

Monotonie

Exercice 4

Donner la monotonie des suites suivantes.

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3}{n+5}$,
2. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{n}{n^2+1}$,
3. $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $w_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = w_n + w_n^2$,
4. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n^2}$.

Suite majorée, minorée, bornée

Definition

Soit une suite **réelle** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On rappelle que l'image de u est

$$u(\mathbb{N}) = \{u_n / n \in \mathbb{N}\},$$

qui est donc un sous ensemble de $\mathbb{R}$.

On dira que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

- ▶ **majorée** si l'image de u est majorée i.e. :
 $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M,$
- ▶ **minorée** si l'image de u est minorée i.e. :
 $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m,$
- ▶ **bornée** si l'image de u est bornée i.e. :
 $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$

Exemple

- ▶ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n+1}$, est bornée.
- ▶ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$, est bornée.
- ▶ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n + 2$, est minorée mais n'est pas majorée.
- ▶ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right)$, est bornée.
- ▶ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(-1)^n$, est ni majorée ni minorée.

Résultats de stabilité pour la monotonie et pour les suites maj., min., bornée

Il existe de nombreux résultats de stabilités aux opérations de base des notions de monotonie (croissance, décroissance,...) et des notions de suite majorée, minorée, bornée.

Quelques exemples ci-dessous.

Proposition

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

- ▶ *Si u est croissante, alors pour tout $\lambda \geq 0$, $\lambda u = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.*
- ▶ *Si u et v sont croissantes, alors $u + v = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.*
- ▶ *Si u et v sont minorées, alors $u + v$ est minorée.*
- ▶ *Si u et v sont bornées, alors $uv = (u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.*

Propriété vraie à partir d'un certain rang (APCR)

Definition

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une propriété / un prédicat P à partir d'un certain rang (APCR) s'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(u_{n+N})_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie (P) .

Exemple

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 20n - n^2$ est décroissante à partir d'un certain rang.

Section 2

Convergence des suites

Définition d'une suite convergente

Définition (Suite convergente vers $\ell \in \mathbb{K}$)

On dira que la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ **converge vers $\ell \in \mathbb{K}$** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On dira également que u a pour limite ℓ et on notera

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ ou } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell.$$

Interprétation.

- ▶ $\forall \varepsilon > 0, \dots, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$: ε peut être pris arbitrairement petit, donc à des termes de la suite à être **arbitrairement proche de ℓ** .
- ▶ $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$: pour un ε donné, ce sont **tous les termes APCR** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui sont éloignés d'au plus ε de ℓ .

Définition d'une suite convergente

Définition

On dira que la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{K}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Remarque

- ▶ L'entier N dépend de ε ("∃ après un ∀").
- ▶ Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la valeur absolue est remplacée par le **module**.
- ▶ Dans le cas réel, l'inégalité $|u_n - l| \leq \varepsilon$ se réécrit $-\varepsilon \leq u_n - l \leq \varepsilon$, ou encore $l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon$.
- ▶ On dira que la suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge ou est convergente, s'il existe $l \in \mathbb{K}$ tel que u converge vers l .

Exemple

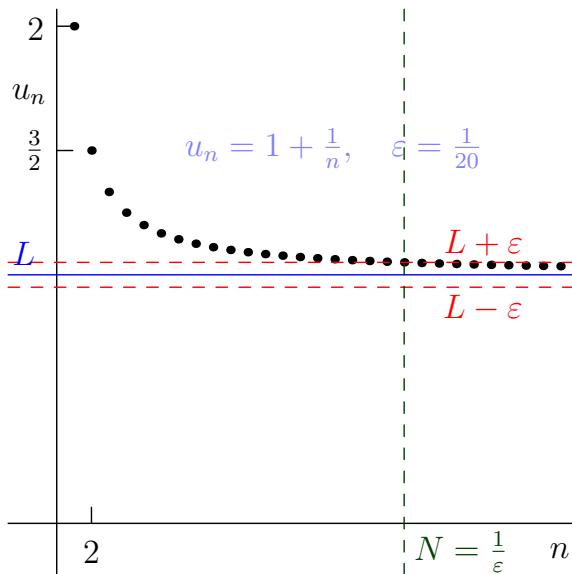
Soit u la suite (réelle) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{n}$. Alors on vérifie que u satisfait la définition de la convergence

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

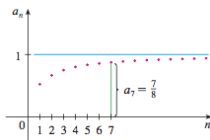
pour $\ell = 1$. En effet :

Donc u converge vers 1.

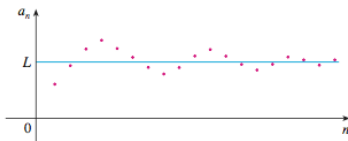
Illustration convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $L = 1$.



Illustrations de suites convergentes



$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.



Suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergentes non monotones.

Remarque

Il n'y a pas de liens, sans hypothèses supplémentaires, entre les suites monotones et les suites convergentes.

Exercice 5

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge vers 0.

Catalogue de limites (finies)

Proposition

On démontre plus généralement, à partir de la définition de la convergence, la validité des limites suivantes.

- ▶ Pour tout $\alpha > 0$, $\frac{1}{(\ln(n))^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- ▶ Pour tout $\alpha > 0$, $\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- ▶ Pour tout $a \in]-1, 1[$, $a^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Remarque

Elles font parties du socle de base permettant de déterminer des limites plus compliquées grâce aux résultats d'opérations sur les limites (voir plus tard) et sans devoir repasser par la définition de la convergence !

Unicité de la limite

Proposition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente, alors la limite de u est **unique**. Dit autrement, si u converge vers $\ell \in \mathbb{K}$, alors il n'existe pas $\ell' \in \mathbb{K}$, $\ell' \neq \ell$, tel que u converge vers ℓ' .

Démonstration.



Convergence $\Rightarrow$ bornitude

Proposition

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration.

Soit u une suite numérique (à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) qui converge vers $\ell \in \mathbb{K}$.



Convergence $\Rightarrow$ bornitude

Remarque

La réciproque est fausse ! Une suite bornée n'est pas forcément convergente. Par exemple $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée mais n'est pas convergente.

Exercice 6

Montrer que la suite n'est pas convergente $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Suites divergentes

Definition (Divergence)

Une suite divergente, ou qui diverge, est une suite qui ne converge pas.

Exemple

- ▶ Les suites $(n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(-n^2)_{n \in \mathbb{N}}$, $((-1)^n n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne sont pas bornées, donc ne peuvent converger, donc sont **divergentes**.
- ▶ Les suites $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(1 + (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées, mais ne convergent pas, donc sont également **divergentes**.

Suites divergentes

Exercice 7

1. Montrer que les suites $u = (n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (-n^2)_{n \in \mathbb{N}}$, $w = ((-1)^n n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne sont pas bornées. En déduire que ce sont des suites divergentes.
2. Montrer que la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Suites divergentes

Parmi les suites divergentes : les suites qui tendent vers $\pm\infty$.

Definition (Limite $+\infty$)

On dit que la suite **réelle** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, noté $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A.$$

Definition (Limite $-\infty$)

On dit que la suite **réelle** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, noté $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq A.$$

Suites divergentes

Exemple

La suite $u = (n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. La suite $u = (-n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

Catalogue de limites (infinies)

Proposition

On démontre plus généralement, à partir de la définition de la limite $+\infty$, la validité des limites suivantes.

- ▶ Pour tout $\alpha > 0$, $(\ln(n))^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
- ▶ Pour tout $a > 1$, $a^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
- ▶ $n! \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
- ▶ $n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Remarque

Elles font parties du socle de base permettant de déterminer des limites plus compliquées grâce aux résultats d'opérations sur les limites (voir plus tard) et sans devoir repasser par la définition !

Suites divergentes

Proposition

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Alors u est divergente.

Démonstration.

Si par exemple u tend vers $+\infty$, alors on montre dans un premier temps que u n'est pas bornée (**exercice !**).

Or si u convergeait, u serait bornée. Donc u n'est pas convergente. Donc u est divergente. $\square$

Remarque

La réciproque est fausse ! Il y a des suites divergentes qui n'admettent pas de limite.

- ▶ Pas de limite finie : une suite convergente n'est pas par définition divergente,
- ▶ Ni de limite infinie : par exemple la $((-1)^n n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas, mais ne tend pas non plus vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Subsection 2

Opérations sur les limites

Opérations sur les suites convergentes

Proposition (Somme, produit)

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques convergentes vers resp. $\ell \in \mathbb{K}$ et $\ell' \in \mathbb{K}$.

- ▶ Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\lambda \ell$, i.e.
$$\lambda u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \ell.$$
- ▶ $u + v = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\ell + \ell'$, i.e. $u_n + v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell + \ell'$
- ▶ $uv = (u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\ell \ell'$, i.e. $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \ell'$.

Démonstration.

Opérations sur les suites convergentes

Proposition (Quotient)

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ deux suites convergentes vers resp. $\ell \in \mathbb{K}$ et $\ell' \in \mathbb{K}$. Supposons $\ell \neq 0$. Alors :

- ▶ u ne s'annule pas APCR : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \neq 0$.
- ▶ La suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq N}$ tend vers $\frac{1}{\ell}$, i.e. $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ell}$.
- ▶ La suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n \geq N}$ tend vers $\frac{\ell'}{\ell}$, i.e. $\frac{v_n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell'}{\ell}$.

Opérations sur les suites convergentes

Proposition (Suite CV $\times$ suite bornée)

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que u converge vers 0 et v est bornée.

Alors uv tend vers 0.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$.

- ▶ Comme (v_n) est bornée : $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M$.
- ▶ Comme $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$: $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}$.
- ▶ Donc : $\forall n \geq N, |u_n v_n| \leq M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$.

On a donc bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n v_n| \leq \varepsilon.$$

Opérations sur les suites convergentes

Proposition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers 0.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $|u| = (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ CV vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$

$$||u_n| - 0| \leq \varepsilon,$$

ce qui se réécrit

$$|u_n - 0| \leq \varepsilon.$$

D'où u CV vers 0.



Opérations sur les suites convergentes

Exemple

$\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1 car

Opérations sur les suites convergentes

Exemple

$\left(\frac{(-1)^n}{n^{4/3}} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(e^{\frac{2i\pi}{3}} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 car

Exercice 8

Donner les limites des suites suivantes.

► $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3n+6+(-1)^n}{5n+5}.$

► $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{n^2}.$

► $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{n^3+2n^2((-1)^n+4)+5n-1}{3n^3+n^2+4n+1}.$

Opérations sur les limites infinies

Proposition (Somme, produit)

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

- ▶ $\forall \lambda > 0$ (resp. $\forall \lambda < 0$), si $(u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty)$ alors $\lambda u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ (resp. $\lambda u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$).
- ▶ $(u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \text{ et } v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \text{ (ou } +\infty)) \Rightarrow u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.
- ▶ $(u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \text{ et } v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell > 0 \text{ (ou } +\infty)) \Rightarrow u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.
- ▶ $(u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \text{ et } v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell < 0 \text{ (ou } -\infty)) \Rightarrow u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$.
- ▶ Résultats analogues pour les limites $-\infty$.

Démonstration.

Tous ces résultats se démontrent à partir des définitions des limites ! A faire en exercice. Certains seront faits en TD. □

Opérations sur les limites infinies

Proposition (Quotient)

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$$

$\blacktriangleright$ Si u strictement positive APCR et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty.$$

$\blacktriangleright$ Si u strictement négative APCR et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = -\infty.$$

Exercice 9

Faire les preuves de la proposition précédente.

Opérations sur les limites infinies

Exemple

Donner les limites des exemples suivants.

► $u = \left(\frac{1}{\ln(n+2)} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$

► $v = \left(\ln(n+1) \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}.$

Opérations sur les limites infinies

Absences de résultats généraux dans certaines situations

Exemple

Soient $u = (n^2)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (-n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $w = (-2n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tendent resp. vers $+\infty$, $-\infty$ et $-\infty$. On a

- ▶ $u + v$ tend vers 0 (car suite constante nulle),
- ▶ $u + w$ tend vers $-\infty$.

On ne peut donc rien conclure en général sur la limite d'une somme de deux suites dont l'une tend vers $+\infty$ et l'autre vers $-\infty$. C'est une forme indéterminée.

Formes indéterminées :

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| ▶ $(+\infty) - (+\infty)$. | ▶ $(+\infty) + (-\infty)$. | ▶ $\frac{0}{0}$. |
| ▶ $(-\infty) - (-\infty)$. | ▶ $0 \times \pm\infty$. | ▶ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. |

Exercice 10

Soit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$ et $v_n = 6^n$.

Donner les limites de u , v , uv , $u + v$, $\frac{u}{v}$ et $u - v$.

Subsection 3

Limites et inégalités

Limite dans une inégalité : limites finies

Théorème

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si

- ▶ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$,
- ▶ u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, v converge vers $\ell' \in \mathbb{R}$,

Alors $\ell \leq \ell'$.

Démonstration.



Limite dans une inégalité : cas des limites finies

Corollaire

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq a$ (resp. $u_n \geq a$) et u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leq a$ (resp. $\ell \geq a$).

Remarque

Attention ! Même si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > a$ et u converge vers ℓ , alors la conclusion est seulement $\ell \geq a$ (et non $\ell > a$).

Le passage à la limite transforme des inégalités strictes en inégalités larges !

Exemple

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n} > 0$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Théorème d'encadrement

Théorème

Soient trois suites réelles (u_n) , (v_n) et (w_n) vérifiant :

- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n,$
- ▶ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers $\ell \in \mathbb{R},$

alors v converge vers ℓ .

Démonstration.



Théorème d'encadrement

Exemple

Soit v la suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{\sin(n)}{n^2 + 1}$.

Limite dans une inégalité : cas des limites infinies

Théorème

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites réelles telles que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.

- ▶ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- ▶ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exercice 11

Prouver ce théorème.

Limite dans une inégalité : cas des limites infinies

Exemple

Donner les limites des suites suivantes.

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 + (-1)^n$.
2. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -n^4 + 5n^2 \cos\left(\frac{2\pi n}{7}\right)$.

Exercice 12

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n^2$.
3. Donner la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 13

Donner la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right)^n$.