Université Paris Cité

Licence 1ère année
Mathématiques et Calcul 1

Quentin Denoyelle
quentin.denoyelle@u-paris.fr

(avec la collaboration de A. Chambaz, L. Moisan et F. Benaych)

UFR de Mathématiques et Informatique
Université Paris Cité, Campus Saint-Germain-des-Près

6 octobre 2025

Chapitre 2 : Polynômes

Section 1

Quelques généralités

Polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

Definition

On appelle polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), toute quantité s'écrivant $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$, pour $n \in \mathbb{N}$, où

- $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{K}$,
- X est une variable ou indéterminée obéissant aux règles de calculs : pour $k, j \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha X^k + \beta X^k = (\alpha + \beta)X^k$ et $(\alpha X^k)(\beta X^j) = (\alpha\beta)X^{k+j}$.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, d'indéterminée X. Il obéit aux règles de distributivité usuelles.

Example

Soient $P = X^2 - 1$ et $Q = 3X^3 + 2X$ deux éléments de $\mathbb{R}[X]$. Alors $PQ =$

Polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

Soit $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Vocabulaire.

- Si $P \neq 0$. Degré de P : plus grand $k \in \mathbb{N}$, $a_k \neq 0$. Noté : $\deg(P)$.
- monôme de degré k : a_kX^k (avec $a_k \neq 0$).
- a_kX^k est le terme de degré k de P et a_k est le coefficient de degré k de P.
- Si $\deg(P) = n$, alors a_n est coefficient dominant de P et a_nX^n son terme dominant.
- a_0 est le coefficient constant de P. On dira que P est un polynôme constant si $P = a$ pour un certain $a \in \mathbb{K}$.
- Si $P \neq 0$. Racine de P : $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

Proposition

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

Corollaire

Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Polynôme dérivée

Definition

Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$. On appelle polynôme dérivé de P (noté P') le polynôme

$$P' = a_1 + 2a_2X + \ldots + na_nX^{n-1}.$$

En itérant le processus, on définit ainsi les dérivées successives P', P'', $P^{(3)}$, etc...

Exercice 1

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P' = 0$ si et seulement si P est un polynôme constant.

Résultats sur le degré

Remarque

Si $P = 0$, on utilise la convention $\deg(P) = -\infty$.

Proposition

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. *Alors* $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Démonstration.

$\square$

Résultats sur le degré

Exercice 2

Montrer que $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Division euclidienne de polynômes

Théorème (Division euclidienne)

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, $B \neq 0$. *Alors il existe un unique couple* $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ *satisfaisant*

- $A = QB + R$,
- $\deg(R) < \deg(B)$.

Dans ce cas, $A = QB + R$ *est la division euclidienne de* A *par* B, R *est le reste de cette division.*

Division euclidienne de polynômes

Example

Effectuer la division euclidienne de $P = 2X^3 + 1$ par $Q = X^2 + X$.

Algorithme de la division euclidienne.

- Considérer les termes dominants de P et Q et effectuer la division. Notons $\tilde{S}$ le résultat.
- Déterminer le reste de cette opération : $\tilde{P} = P - Q\tilde{S}$. Nécessiarement $\deg(\tilde{P}) < \deg(P)$.
- Retourner à la première étape. Remplacer P par $\tilde{P}$. Ajouter le nouveau $\tilde{S}$ au précédent.
- Continuer tant que $\deg(\tilde{P}) < \deg(Q)$. Quand c'est le cas, $R = \tilde{P}$ et $S = \tilde{S}$.

Division euclidienne de polynômes

Example

Effectuer la division euclidienne de $P = 2X^3 + 1$ par $Q = X^2 + X$.

Théorème

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(P) = n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *α est une racine de P,*
2. *il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(Q) = n - 1$ et $P = (X - \alpha)Q$.*

Démonstration.

$\square$

Méthode pour trouver Q : par identification.

- Introduire des coefficients pour Q :
  $Q = b_{n-1}X^{n-1} + \ldots b_1X + b_0$.
- Développer $(X-\alpha)Q$.
- Identifier les coefficients obtenus avec ceux de P.

Example

Soit $P = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$. On a $P(2) = 0$. Cherchons Q tel que $P = (X-2)Q$.

Racines et factorisation

Racines multiples

Definition (Multiplicité)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ racine de P. On appelle multiplicité de α le plus grand $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $P = (X-\alpha)^k Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$.

Example

$X^3(X-1)(X-2)^2$ admet 3 racines : 0 (de multiplicité 3), 1 (racine simple), et 2 (racine double).

Théorème

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors on a l'équivalence entre

1. *α est une racine de multiplicité k de P,*
2. *il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$, $P = (X-\alpha)^k Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$,*
3. *$P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.*

Théorème de d'Alembert

Théorème (Théorème de d'Alembert)

Tout polynôme non-constant à coefficients complexes admet au moins une racine complexe.

Démonstration.

Admis. □

Corollaire

Tout polynôme de degré $n \geqslant 1$, à coefficients complexes, admet exactement n racines complexes (comptées autant de fois que leur multiplicité).

Théorème de d'Alembert

Corollaire

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg(P) = n \in \mathbb{N}^*$. *Alors* P *s'écrit*

$$P = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\dots(X - \alpha_n),$$

avec a *le coefficient dominant de* P *et* α_i *sont les racines de* P*, comptées autant de fois que leur multiplicité*

Théorème de d'Alembert

Example

- Le polynôme $P = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ a pour racines $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}, j^2, i, -i$. Comme son coefficient dominant est 1 et $\deg(P) = 4$, on peut donc écrire $P = (X-j)(X-j^2)(X-i)(X+i)$.
- Cherchons les racines du polynôme $P = X^3 + X - 2$. Comme $P(1) = 0$ (1 est racine évidente), on peut factoriser P sous la forme
$$P = (X-1)(X^2+X+2).$$
Les deux autres racines de P sont donc les racines du polynôme $X^2 + X + 2$, c'est-à-dire les complexes $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

Exercice 3
Factoriser $P = X^3 - 3X^2 + 2X$.