

Licence 1ère année Mathématiques et Calcul 1

Quentin Denoyelle
quentin.denoyelle@u-paris.fr

(avec la collaboration de A. Chambaz, L. Moisan et F. Benaych)

UFR de Mathématiques et Informatique
Université Paris Cité, Campus Saint-Germain-des-Près

3 octobre 2025

Chapitre 1 : Les Nombres Complexes

- 1 Introduction
 - Opérations sur $\mathbb{C}$
- 2 Géométrie des nombres complexes
 - Nombres complexes et opérations représentés dans le plan
 - Conjugaison
 - Module d'un nombre complexe
 - Lieux géométriques simples
 - Argument
 - Représentation de la multiplication
- 3 Différentes manières d'écrire un nombre complexe
 - Écriture trigonométrique des nombres complexes
 - Exponentielle complexe - Formule d'Euler
 - Écriture exponentielle des nombres complexes
- 4 Applications
 - Formule de Moivre
 - Équations du second degré à coefficients complexes
 - Deux formules à connaître
 - Trigonométrie

Section 1

Introduction

Historique

Introduits au XVI^e siècle par Cardan, Bombelli, . . . comme un artifice pour résoudre des équations du 3^{ème} degré.

Exemple

Pour résoudre l'équation

$$x^3 - 7x + 6 = 0,$$

les formules générales imposent de résoudre d'abord

$$x^2 + 6x + \frac{343}{27} = 0.$$

dont le discriminant $\Delta = 6^2 - 4 \times \frac{343}{27} = \frac{-400}{27}$ est négatif !

Historique

Exemple

Pour résoudre l'équation

$$x^3 - 7x + 6 = 0,$$

les formules générales imposent de résoudre d'abord

$$x^2 + 6x + \frac{343}{27} = 0.$$

dont le discriminant $\Delta = 6^2 - 4 \times \frac{343}{27} = \frac{-400}{27}$ est négatif !

L'introduction du nombre "imaginaire" $\sqrt{\Delta}$ (dont le carré est négatif) permet alors de continuer formellement les calculs, qui aboutissent ensuite aux solutions : 1, 2, -3 toutes réelles !

Pourquoi les nombres complexes ?

Indispensables, notamment via l'**analyse de Fourier**, en :

- ▶ physique (mécanique des fluides, mécanique quantique, cosmologie,...),
- ▶ traitement du signal
- ▶ probabilités et statistique,
- ▶ traitement des images (algorithmes de Snapshot, Instagram, Photoshop, etc. . .),
- ▶ ...

Définition - Nombres complexes

On définit formellement le nombre imaginaire i comme une racine carrée de -1 : $i^2 = -1$.

Definition

On définit l'ensemble des **nombres complexes** comme :

$$\mathbb{C} = \{x + iy / x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

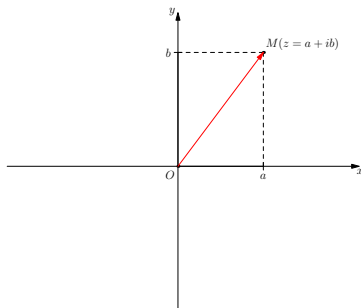
- ▶ x est la **partie réelle** de z , notée : $x = \operatorname{Re}(z)$
- ▶ y est la **partie imaginaire** de z , notée : $y = \operatorname{Im}(z)$

Représentation d'un nombre complexe

On se donne un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et considérons le point du plan $M = (a, b)$.

Alors M représente le nombre complexe $z = a + ib$ dans le plan. z est appelé l'affixe** du point M et on note $M(z)$.**



L'ensemble de ces points M associé aux $z \in \mathbb{C}$ dans ce repère est appelé **plan complexe**.

Règles de calcul

Soient $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et $z' = x' + iy' \in \mathbb{C}$.

Proposition (Opérations de base)

- ▶ *Annulation* : $z = x + iy = 0 \iff x = y = 0$.
- ▶ *Sommation* : $z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y')$.
- ▶ *Produit* : $zz' = (x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$.

Corollaire

- ▶ $x + iy = x' + iy' \iff x = x' \text{ et } y = y'$.
- ▶ Si $x + iy \neq 0$, alors $(x + iy) \frac{x - iy}{(x^2 + y^2)} = 1$. Donc

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

Règles de calcul

Exercice 1

Soient $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et $z' = x' + iy' \in \mathbb{C}$. Écrire sous la forme $a + ib$ (appelée *écriture algébrique*), avec $a, b \in \mathbb{R}$, la quantité suivante :

$$\frac{z}{z'}.$$

Règle de calcul

Exercice 2

Écrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique $x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $(5 + 6i) + (3 - 2i)$.

2. $(4 - \frac{1}{2}i) - (3 - \frac{5}{2}i)$.

3. $(3 + 2i)(5 - 3i)$.

4. $(1 - \frac{i}{3})(2 + 6i)$.

5. $2(4 + i)$.

6. i^3 .

7. i^4 .

8. $\frac{1}{2+3i}$.

9. $\frac{2+2i}{2-i}$.

10. $\frac{3-5i}{3+2i}$.

Section 2

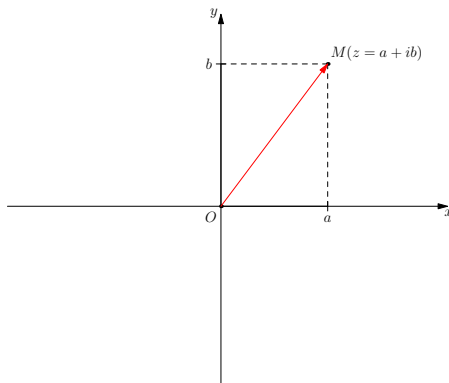
Géométrie des nombres complexes

Représentation d'un nombre complexe

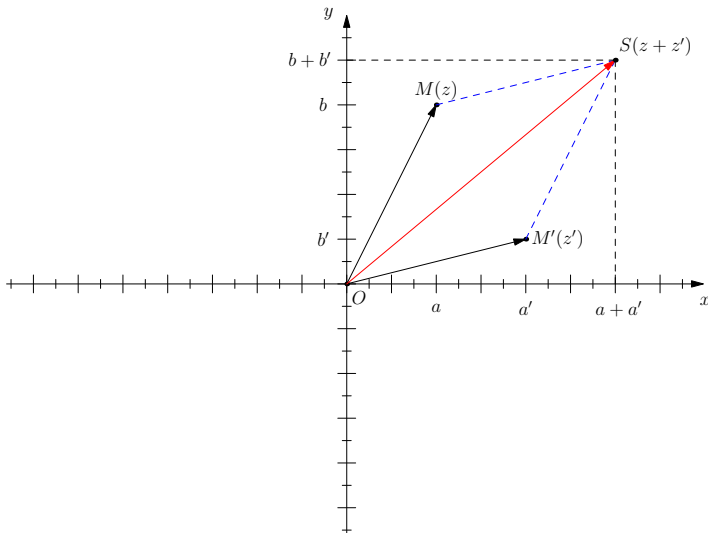
On se donne un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et considérons le point du plan $M = (a, b)$.

Alors M représente le nombre complexe $z = a + ib$ dans le plan. z est appelé l'affixe** du point M et on note $M(z)$.**

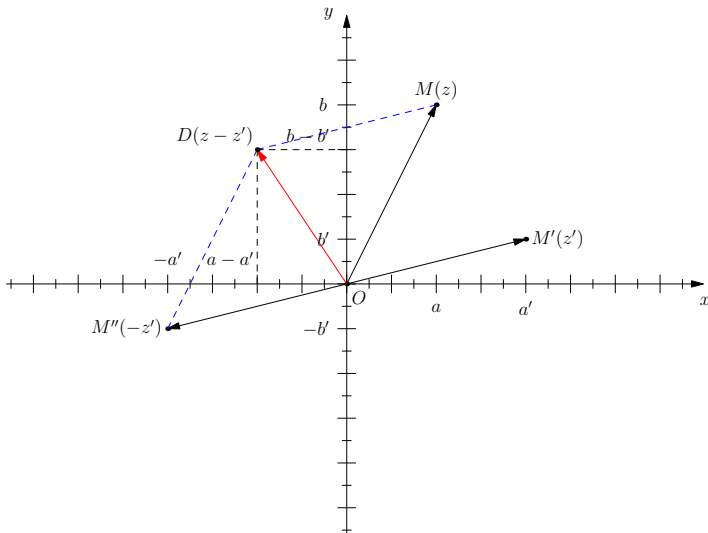


Représentation de l'addition



Détermination graphique de $z + z'$

Représentation de l'addition



Détermination graphique de $z - z'$

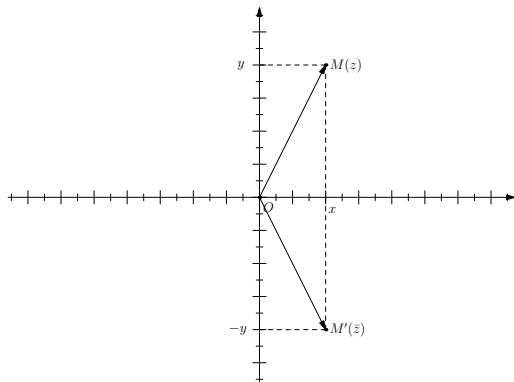
Nombre complexe conjugué

Definition (Conjugué)

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

On appelle nombre complexe **conjugué de z** , le nombre

$$\bar{z} = x - iy.$$



Conjugué : règles de calcul

Proposition

Soient $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Donc $\bar{z} = x - iy$.

- ▶ $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$.
- ▶ $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.
- ▶ $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$.
- ▶ $z \in i\mathbb{R} \iff z + \bar{z} = 0$.
- ▶ $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ $\overline{(\bar{z})} = z$, $\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.
- ▶ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

Exercice 3

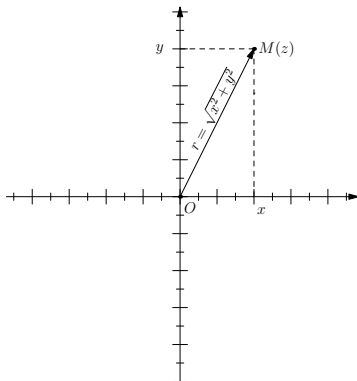
1. Calculer $\overline{2 + 3i}$.
2. Résoudre $z + 2\bar{z} = 0$.
3. Prouver toutes les relations ci-dessus !

Module

Definition

On appelle **module** de $z = x + iy \in \mathbb{C}$, le **réel positif**

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Utilisation de la conjugaison pour le calcul de $\frac{z}{z'}$

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $z' \neq 0$.

On a

$$\frac{z}{z'} =$$

Module

Proposition

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

- ▶ $|z| = |-z| = |\bar{z}|, \quad |x| \leq |z|, \quad |y| \leq |z|.$
- ▶ $|z| = 0 \iff z = 0.$
- ▶ $|zz'| = |z||z'|, \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}, \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}.$
- ▶ $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (*inégalité triangulaire pour le module*).

Exercice 4 (Excellent entraînement !)

1. Illustrer les relations qui peuvent l'être avec des dessins.
2. Prouver toutes ces relations.

Lieux géométriques : le cercle

Proposition

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \geq 0$. L'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| = r\},$$

représente dans le plan complexe le cercle de centre Ω (d'affixe z_0) et de rayon r .

Lieux géométriques : la médiatrice

Proposition

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. L'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C} / |z - a| = |z - b|\},$$

représente dans le plan complexe la médiatrice du segment $[AB]$, où A et B sont les points d'affixes a et b respectivement.

Lieux géométriques : la droite

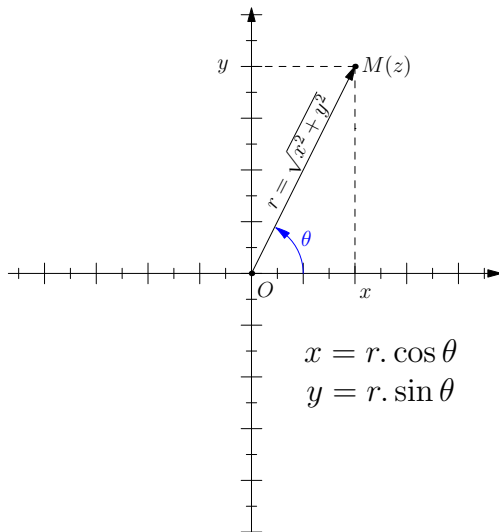
Proposition

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. L'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(az) = \alpha\},$$

représente dans le plan complexe une droite (qui passe par le point d'affixe $\frac{\alpha}{a}$).

Argument d'un nombre complexe



Argument d'un nombre complexe

Definition

On dit qu'un réel $\theta \in \mathbb{R}$ est **un argument** du nombre complexe $z = x + iy$, $z \neq 0$, s'il vérifie

$$\begin{cases} \cos(\theta) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin(\theta) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

On a alors

$$z = |z| \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = \underbrace{|z|(\cos \theta + i \sin \theta)}_{\text{écriture trigonométrique de } z}.$$

Argument d'un nombre complexe

Definition (Argument principal)

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

L'unique argument $\theta \in \mathbb{R}$ de z satisfaisant $\theta \in [0, 2\pi[$ est appelé **l'argument principal** de z et noté **$\arg(z)$** .

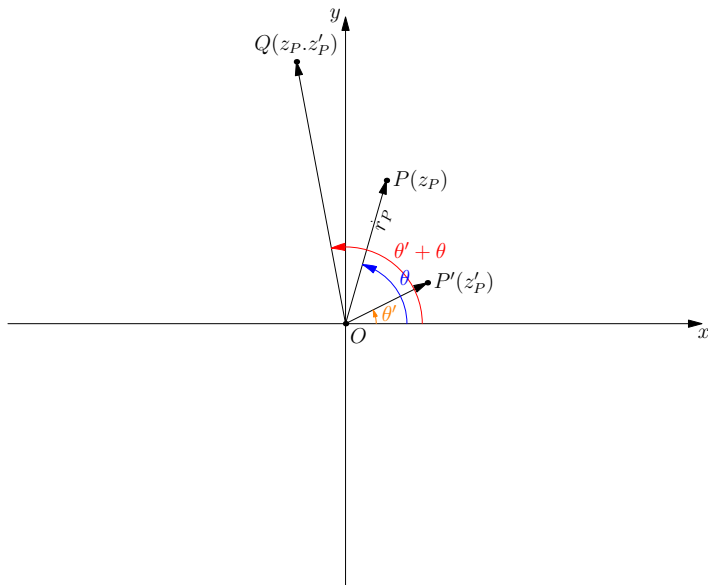
Représentation de la multiplication

Exemple

Prendre des exemples simples de nombres complexes z, z' , les multiplier et interpréter géométriquement le résultat.

Représentation de la multiplication

Représentation de la multiplication



Argument d'un produit

On observe donc la règle suivante :

Proposition

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi],$$

c-à-d existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi.$$

Plus généralement : multiplier deux nombres complexes semble revenir à

- ▶ multiplier leurs modules,
- ▶ ajouter leurs arguments et prendre le résultat modulo 2π .

Section 3

Différentes manières d'écrire un nombre complexe

Résumé. Pour l'instant, deux manières d'écrire un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$:

1. algébrique : $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$
2. trigonométrique : $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec θ un argument de z .

Remarque

Tous les $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sont des arguments de z .

Exemples d'écritures trigonométriques.

- Soit $z = 1 + i$. On a $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Donc

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \\ &= \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right). \end{aligned}$$

$$\text{Et } \arg(z) = \frac{\pi}{4}.$$

- Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$. Donc $|z| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ et

$$\begin{aligned} z &= 2\sqrt{3} \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + i \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \right) = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right), \\ &= 2\sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right). \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \arg(z) = \frac{\pi}{6}.$$

Exemples d'écritures trigonométriques.

► Soit $z = 1 - i\sqrt{3}$, donc $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ et

$$z = 2 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \right).$$

D'où $\arg(z) = \frac{5\pi}{3}$.

Angles remarquables à connaître

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Exercice 5

Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique.

1. $z_1 = -3 + 3i$.

3. $z_3 = 3\sqrt{3} - 3i$.

5. $z_5 = -2$.

2. $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$.

4. $z_4 = 8i$.

Définition : exponentielle complexe

Comment avez-vous défini la fonction exponentielle ?

Definition (Exponentielle par les séries)

Pour $x \in \mathbb{R}$

$$e^x \stackrel{\text{def.}}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Correspond à la fonction exponentielle que vous connaissez !

Définition : exponentielle complexe

Remarque

La quantité $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ est toujours bien définie en remplaçant $x \in \mathbb{R}$ par $z \in \mathbb{C}$.

Définition (Exponentielle complexe par les séries)

Pour $z \in \mathbb{C}$

$$e^z \stackrel{\text{def.}}{=} 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Théorème

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}.$$

Définition : exponentielle complexe

Théorème

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}.$$

Corollaire

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors

1. $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.
2. $\frac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$.
3. $(e^z)^n = e^{nz}$.
4. $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

Formule d'Euler

Théorème (Formule d'Euler)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, alors

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

Démonstration.

Hors programme ! Idées sans les détails

https://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_d'Euler#/media/Fichier:Euler's_formula_proof.gif



Écriture exponentielle des nombres complexes

Théorème (Écriture exponentielle)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de z . Alors

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Corollaire (Argument d'un produit)

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a vu $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$.

Démonstration.

On a $z = |z|e^{i\theta}$, $z' = |z'|e^{i\theta'}$, avec $\theta = \arg(z)$ et $\theta' = \arg(z')$. Donc

$$zz' = |z||z'|e^{i\theta}e^{i\theta'} = |zz'|e^{i(\theta+\theta')},$$

donc $\theta + \theta'$ est un argument de zz' , donc
 $\arg(zz') = (\theta + \theta') [2\pi]$.



Écriture exponentielle des nombres complexes

Corollaire (Argument d'un quotient)

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, $z' \neq 0$. On a $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$.

En particulier $\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg(z') [2\pi]$.

Démonstration.

On a $z = |z|e^{i\theta}$, $z' = |z'|e^{i\theta'}$, avec $\theta = \arg(z)$ et $\theta' = \arg(z')$. Donc

$$\frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|} e^{i\theta} \frac{1}{e^{i\theta'}} = \left| \frac{z}{z'} \right| e^{i(\theta - \theta')},$$

donc $\theta - \theta'$ est un argument de $\frac{z}{z'}$, donc $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = (\theta - \theta') [2\pi]$. $\square$

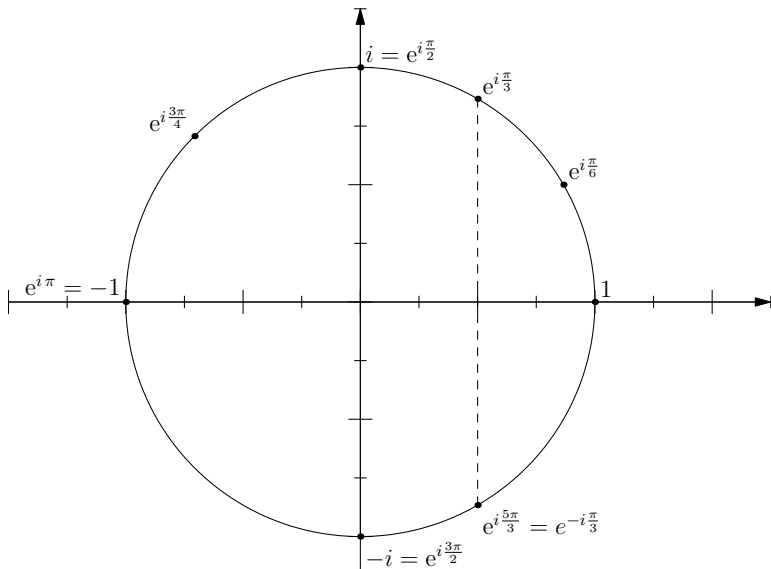
Les nombres complexes de module 1

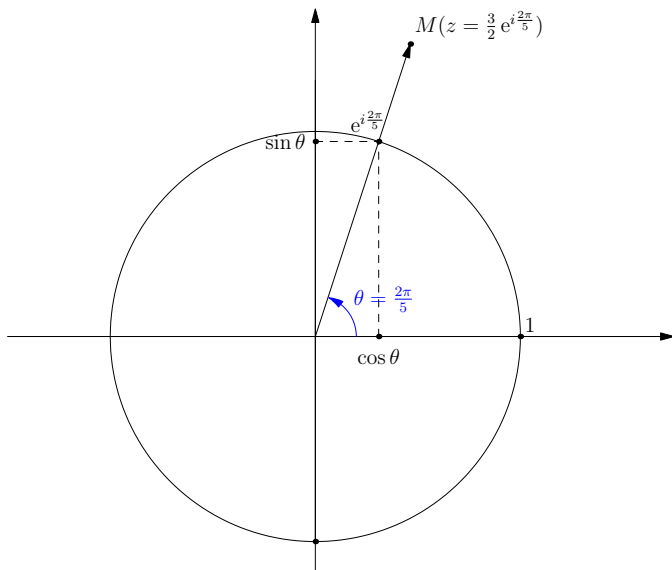
Definition (L'ensemble $\mathbb{U}$)

On appelle ensemble des nombres complexes de module 1, ou **cercle unité**, l'ensemble

$$\begin{aligned}\mathbb{U} &= \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}, \\ &= \{\cos(\theta) + i\sin(\theta) / \theta \in \mathbb{R}\} = \{\cos(\theta) + i\sin(\theta) / \theta \in [0, 2\pi[\}, \\ &= \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\} = \{e^{i\theta} / \theta \in [0, 2\pi[\}.\end{aligned}$$

Les nombres complexes de module 1





Section 4

Applications

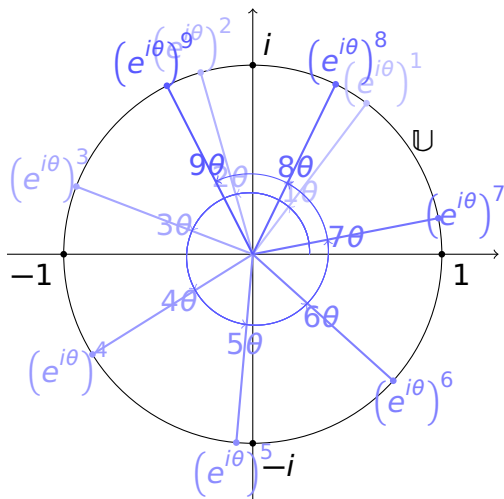
Théorème (Formule de Moivre)

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Démonstration.

On a $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$ □



Premières valeurs de $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Exercice 6

Quelle condition sur $\theta \in \mathbb{R}$ pour que la suite $(e^{in\theta})_{n \in \mathbb{N}}$ soit périodique ?

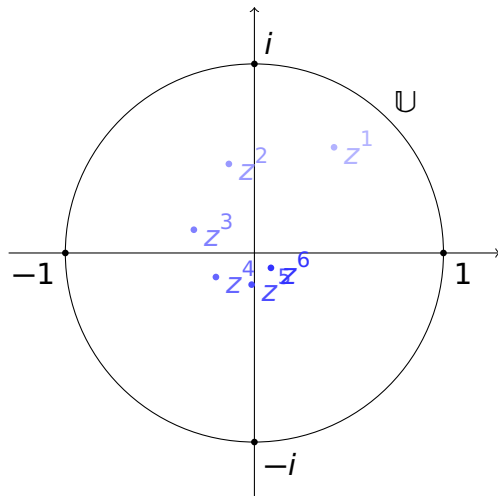
Puissance entière d'un nombre complexe

Proposition

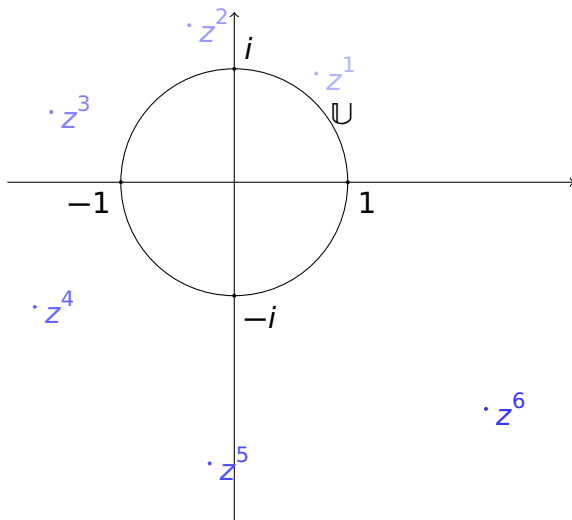
Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a $z = |z|e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de z . Alors

$$z^n = (|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{in\theta} = |z|^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)).$$

En particulier $\arg(z^n) = n \arg(z) [2\pi]$.



Premières valeurs de z^n lorsque $|z| < 1$.



Premières valeurs de z^n lorsque $|z| > 1$.

Racines carrées d'un nombre complexe

Problème. Soit $a \in \mathbb{C}$. On recherche les deux racines carrées de a i.e. les $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = a$.

Méthode 1 : via l'écriture exponentielle de a .

Proposition

Notons $\theta = \arg(a)$, donc $a = |a|e^{i\theta}$. Alors les racines carrées de a sont

$$\pm \sqrt{|a|}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Démonstration.

Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et posons $z = \varepsilon \sqrt{|a|}e^{i\frac{\theta}{2}}$. Alors

$$z^2 =$$



Racines carrées d'un nombre complexe

Exemple

Déterminer les racines carrées complexes de $\Delta = 1 + i\sqrt{3}$.

Racines carrées d'un nombre complexe

Remarque

Parfois il n'est pas évident de trouver un argument θ tel que $a = |a|e^{i\theta}$.

Méthode 2 : par identification des écritures algébriques.

Notons $a = \alpha + i\beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} z^2 = a &\Leftrightarrow (x + iy)^2 = \alpha + i\beta, \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = \alpha + i\beta, \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 &= \alpha, \\ 2xy &= \beta, \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 &= \alpha, \\ 2xy &= \beta, \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{|a|}. \end{cases} \end{aligned}$$

Racines carrées d'un nombre complexe

Example

Trouver les racines carrées de $3 + 4i$.

Cas général : équation du second degré

Problème. On souhaite trouver les deux racines de l'équation polynomiale de degré 2 : $az^2 + bz + c = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Proposition

Notons $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ le discriminant de l'équation. Soit $\delta \in \mathbb{C}$ une racine carrée (complexe) de Δ . Alors l'ensemble des racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ est

$$\left\{ \frac{-b - \delta}{2a}, \frac{-b + \delta}{2a} \right\}.$$

Cas général : équation du second degré

Démonstration.

$$az^2 + bz + c =$$



Cas général : équation du second degré

Exemple

Trouver les racines complexes des équations suivantes.

1. $z^2 + z - 6 = 0.$

2. $2z^2 - 2z + 1 = 0.$

3. $iz^2 - 2z + 1 = 0.$

Somme de puissances

Proposition

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} b^{n+1} - a^{n+1} &= (b-a)(b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \dots + b^1a^{n-1} + a^n), \\ &= (b-a) \sum_{k=0}^n b^{n-k} a^k = (b-a) \sum_{k=0}^n b^k a^{n-k}. \end{aligned}$$

Somme de puissances

Corollaire (Somme géométrique)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$z^{n+1} - 1 = (z - 1)(1 + z + z^2 + \dots + z^n)$, et donc, si $z \neq 1$

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Le binôme de Newton

Proposition (Binôme de Newton)

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

avec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et $k! = 1 \times 2 \times \dots \times k$.

Exemple

- ▶ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- ▶ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- ▶ $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

Le binôme de Newton

Exercice 7

Soit $z = 2 - i$. Mettre z^4 , puis $1 + z + z^2 + z^3$ sous la forme algébrique.

cos et sin via exponentielles complexes

Proposition

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration.

Par la formule d'Euler : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. Donc

□

Application : linéarisation des puissances de sin et cos

Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite transformer $\cos(\theta)^n$ et $\sin(\theta)^n$ en somme de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$.

Très utile en MC2 pour les calculs de primitives !

Méthode.

- ▶ Remplacer $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ par leurs expressions via exponentielles complexes,
- ▶ développer (éventuellement par binôme de Newton),
- ▶ regrouper les exponentielles dont les arguments dépendent de $k\theta$ pour faire apparaître $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$.

Application : linéarisation des puissances de sin et cos

Exemple

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On veut linéariser $\cos(\theta)^3$.

$$\begin{aligned}\cos(\theta)^3 &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3, \\ &= \frac{1}{2^3} \left(e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta} \right), \\ &= \frac{1}{2^3} \left((e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \right), \\ &= \frac{1}{2^3} (2 \cos(3\theta) + 6 \cos(\theta)) = \frac{1}{4} \cos(3\theta) + \frac{3}{4} \cos(\theta).\end{aligned}$$

Application : linéarisation des puissances de sin et cos

Exemple

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On veut linéariser $\sin(\theta)^3$.

$$\begin{aligned}\sin(\theta)^3 &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2i} \right)^3, \\ &= \frac{1}{(2i)^3} (e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}), \\ &= \frac{1}{(2i)^3} ((e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta})), \\ &= \frac{1}{(2i)^3} (2i \sin(3\theta) - 6i \sin(\theta)) = -\frac{1}{4} \sin(3\theta) + \frac{3}{4} \sin(\theta).\end{aligned}$$

Application : linéarisation des puissances de sin et cos

Exercice 8

Linéariser $\cos(\theta)^4$ et $\sin(\theta)^4$.

Application : procédé inverse à la linéarisation

Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite transformer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en somme de $\cos(\theta)^k$ et $\sin(\theta)^k$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$.

Méthode.

- ▶ Écrire $\cos(n\theta)$, respectivement $\sin(n\theta)$, comme la partie réelle, resp. imaginaire, de $e^{in\theta}$,
- ▶ utiliser la formule d'Euler,
- ▶ développer.

Application : procédé inverse à la linéarisation

Exemple

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\cos(4\theta) = \operatorname{Re}(e^{i4\theta}) = \operatorname{Re}((e^{i\theta})^4) = \operatorname{Re}((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4),$$

$$\sin(4\theta) = \operatorname{Im}(e^{i4\theta}) = \operatorname{Im}((e^{i\theta})^4) = \operatorname{Im}((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4).$$

Or

$$\begin{aligned}(\cos \theta + i \sin \theta)^4 &= \cos(\theta)^4 + 4i \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \\ &\quad + 6i^2 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 + 4i^3 \cos(\theta) \sin(\theta)^3 \\ &\quad + i^4 \sin(\theta)^4.\end{aligned}$$

Donc

$$\cos(4\theta) = \cos(\theta)^4 - 6 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 + \sin(\theta)^4,$$

$$\sin(4\theta) = 4 \cos(\theta)^3 \sin(\theta) - 4 \cos(\theta) \sin(\theta)^3.$$

Application : procédé inverse à la linéarisation

Exercice 9

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Sinus d'une somme, cosinus d'une somme

Il est important de savoir retrouver rapidement les formules suivantes. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b),$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b).$$

Méthode. On passe de nouveau par les exponentielles complexes.

Somme de sinus, somme de cosinus

Il est important de savoir retrouver rapidement les formules suivantes. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

$$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

$$\cos(a) - \cos(b) = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Méthode. On passe de nouveau par les exponentielles complexes.

Somme de sinus, somme de cosinus

Quelques relations très utiles, à connaître

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) =$$

$$\cos(\pi - \theta) =$$

$$\cos(\pi + \theta) =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) =$$

$$\sin(\pi - \theta) =$$

$$\sin(\pi + \theta) =$$