Licence 1ère année
Mathématiques et Calcul 1

Quentin Denoyelle
quentin.denoyelle@u-paris.fr

(avec la collaboration de A. Chambaz, L. Moisan et F. Benaych)

UFR de Mathématiques et Informatique
Université Paris Cité, Campus Saint-Germain-des-Près

3 octobre 2025

Chapitre 1 : Les Nombres Complexes

Section 1

Introduction

Historique

Introduits au XVIe siècle par Cardan, Bombelli, . . . comme un artifice pour résoudre des équations du 3ème degré.

Example

Pour résoudre l'équation

$$x^3 - 7x + 6 = 0,$$

les formules générales imposent de résoudre d'abord

$$x^2 + 6x + \frac{343}{27} = 0.$$

dont le discriminant $\Delta = 6^2 - 4 \times \frac{343}{27} = \frac{-400}{27}$ est négatif !

Historique

Example

Pour résoudre l'équation

$$x^3 - 7x + 6 = 0,$$

les formules générales imposent de résoudre d'abord

$$x^2 + 6x + \frac{343}{27} = 0.$$

dont le discriminant $\Delta = 6^2 - 4 \times \frac{343}{27} = \frac{-400}{27}$ est négatif !

Historique

Example

Pour résoudre l'équation

$$x^3 - 7x + 6 = 0,$$

les formules générales imposent de résoudre d'abord

$$x^2 + 6x + \frac{343}{27} = 0.$$

dont le discriminant $\Delta = 6^2 - 4 \times \frac{343}{27} = \frac{-400}{27}$ est négatif !
L'introduction du nombre "imaginaire" $\sqrt{\Delta}$ (dont le carré est négatif) permet alors de continuer formellement les calculs, qui aboutissent ensuite aux solutions : $1, 2, -3$ toutes réelles !

Pourquoi les nombres complexes ?

Indispensables, notamment via l'analyse de Fourier, en :

- physique (mécanique des fluides, mécanique quantique, cosmologie,...),
- traitement du signal
- probabilités et statistique,
- traitement des images (algorithmes de Snapshat, Instagram, Photoshop, etc. . .),
- . . .

Définition - Nombres complexes

On définit formellement le nombre imaginaire i comme une racine carrée de -1 : $\quad i^2 = -1$.

Définition - Nombres complexes

On définit formellement le nombre imaginaire i comme une racine carrée de -1 : $\quad i^2 = -1$.

Definition

On définit l'ensemble des nombres complexes comme :

$$\mathbb{C} = \{x + iy \,/\, x,\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Définition - Nombres complexes

On définit formellement le nombre imaginaire i comme une racine carrée de -1 : $i^2 = -1$.

Definition

On définit l'ensemble des nombres complexes comme :

$$\mathbb{C} = \{x + iy \,/\, x,\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

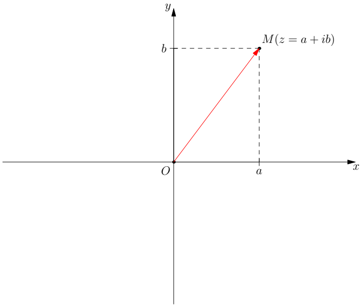
- x est la partie réelle de z, notée : $x = \mathrm{Re}(z)$
- y est la partie imaginaire de z, notée : $y = \mathrm{Im}(z)$

Représentation d'un nombre complexe

On se donne un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et considérons le point du plan $M = (a, b)$.

Alors M représente le nombre complexe $z = a + ib$ dans le plan. z est appelé l'affixe du point M et on note $M(z)$.



L'ensemble de ces points M associé aux $z \in \mathbb{C}$ dans ce repère est appelé plan complexe.

Règles de calcul

Soient $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et $z' = x' + iy' \in \mathbb{C}$.

Proposition (Opérations de base)

- *Annulation :* $z = x + iy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0.$
- *Sommation :* $z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y').$
- *Produit :* $zz' = (x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + x'y).$

Règles de calcul

Soient $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et $z' = x' + iy' \in \mathbb{C}$.

Proposition (Opérations de base)

- *Annulation :* $z = x + iy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0.$
- *Sommation :* $z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y').$
- *Produit :* $zz' = (x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + x'y).$

Corollaire

- $x + iy = x' + iy' \quad \Leftrightarrow \quad x = x'$ et $y = y'$.
- *Si* $x + iy \neq 0$*, alors* $(x + iy)\frac{x - iy}{(x^2 + y^2)} = 1$*. Donc*

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

Règles de calcul

Exercice 1
Soient $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et $z' = x' + iy' \in \mathbb{C}$. Écrire sous la forme $a + ib$ (appelée *écriture algébrique*), avec $a, b \in \mathbb{R}$, la quantité suivante :

$$\frac{z}{z'}.$$

Règle de calcul

Exercice 2

Écrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique $x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $(5+6i)+(3-2i)$.
2. $(4-\frac{1}{2}i)-(3-\frac{5}{2}i)$.
3. $(3+2i)(5-3i)$.
4. $(1-\frac{i}{3})(2+6i)$.
5. $2(4+i)$.
6. i^3.
7. i^4.
8. $\frac{1}{2+3i}$.
9. $\frac{2+2i}{2-i}$.
10. $\frac{3-5i}{3+2i}$.

Section 2

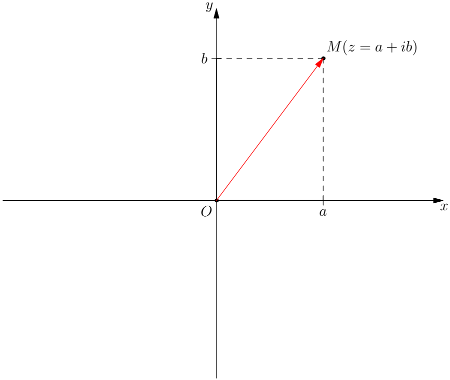
Géométrie des nombres complexes

Représentation d'un nombre complexe

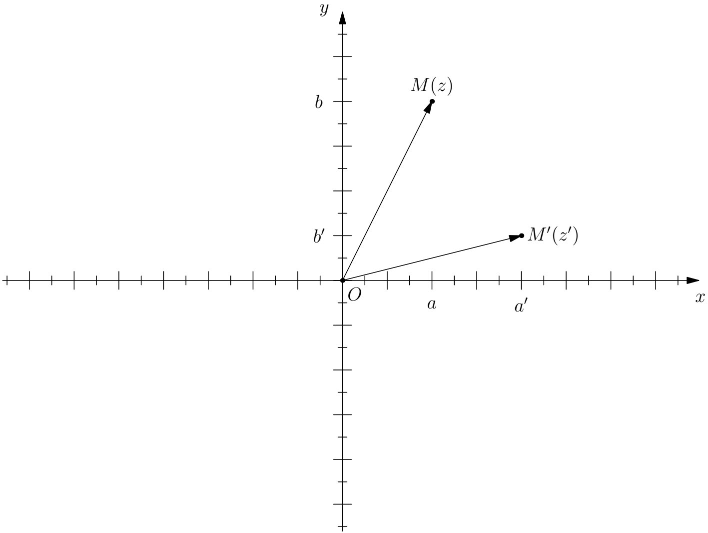
On se donne un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et considérons le point du plan $M = (a, b)$.

Alors M représente le nombre complexe $z = a + ib$ dans le plan. z est appelé l'affixe du point M et on note $M(z)$.

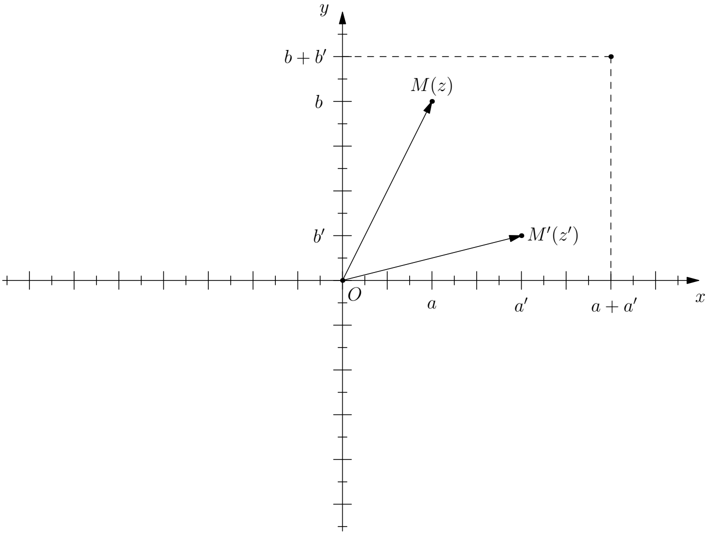


Représentation de l’addition



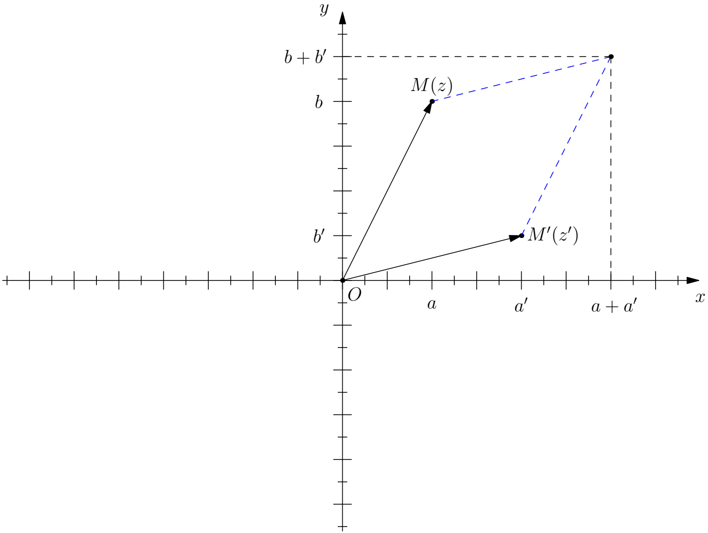
Détermination graphique de $z + z'$

Représentation de l'addition



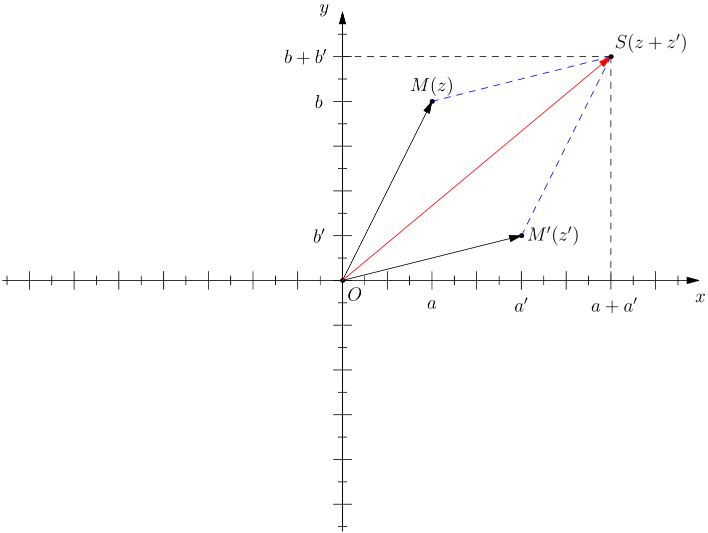
Détermination graphique de $z + z'$

Représentation de l'addition



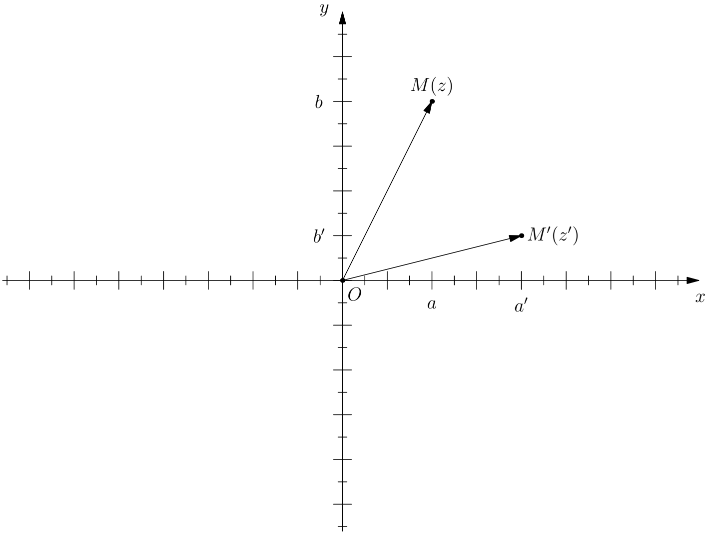
Détermination graphique de $z+z'$

Représentation de l'addition



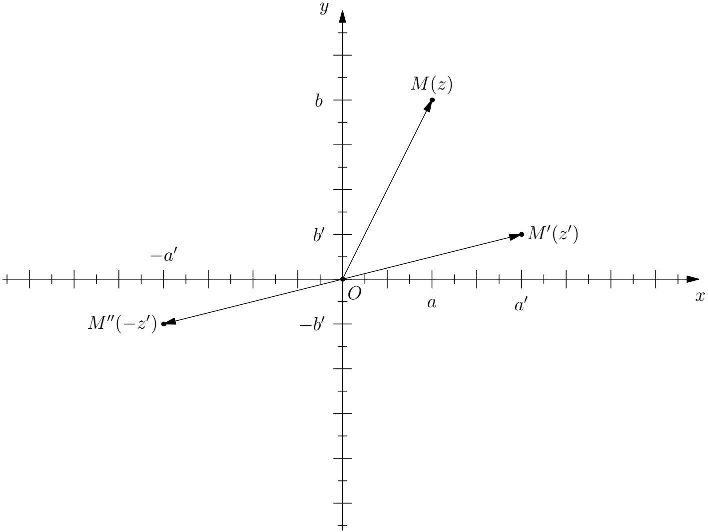
Détermination graphique de $z+z'$

Représentation de l'addition



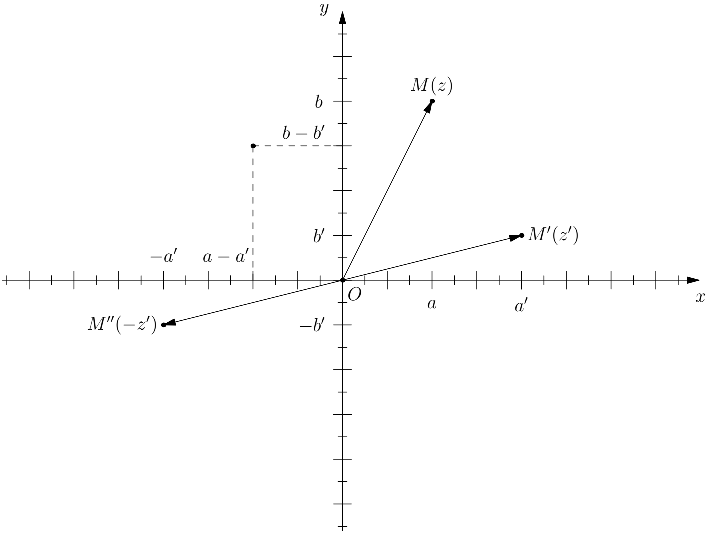
Détermination graphique de $z - z'$

Représentation de l’addition



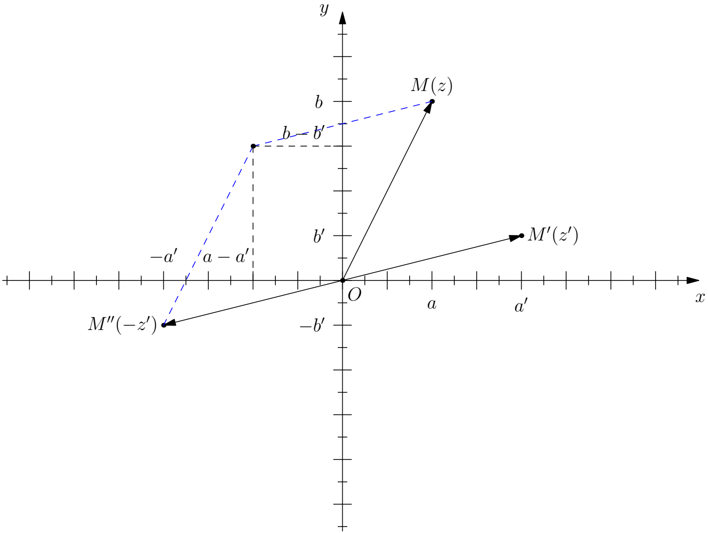
Détermination graphique de $z - z'$

Représentation de l'addition



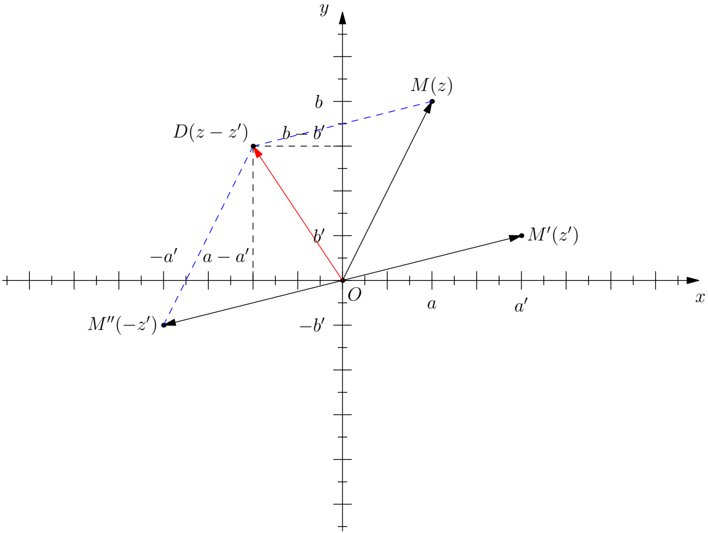
Détermination graphique de $z - z'$

Représentation de l'addition



Détermination graphique de $z - z'$

Représentation de l'addition



Détermination graphique de $z - z'$

Nombre complexe conjugué

Definition (Conjugué)

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.
On appelle nombre complexe conjugué de z, le nombre

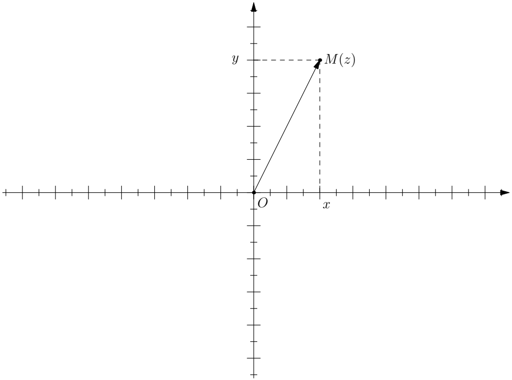
$$\bar{z} = x - iy.$$

Nombre complexe conjugué

Definition (Conjugué)

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.
On appelle nombre complexe conjugué de z, le nombre

$$\bar{z} = x - iy.$$

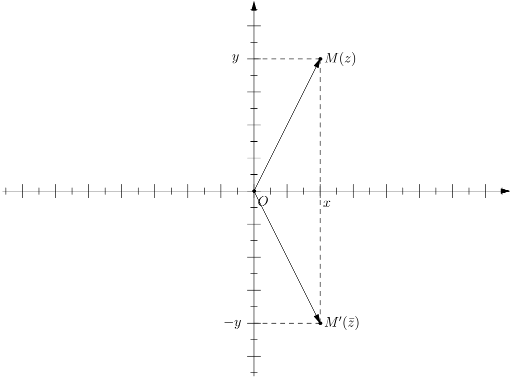


Nombre complexe conjugué

Definition (Conjugué)

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.
On appelle nombre complexe conjugué de z, le nombre

$$\bar{z} = x - iy.$$



Conjugué : règles de calcul

Proposition

Soient $z = x + iy \in \mathbb{C}$. *Donc* $\bar{z} = x - iy$.

- $\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z)$.
- $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.
- $z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z = \bar{z}$.
- $z \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z + \bar{z} = 0$.
- $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \overline{(\bar{z})} = z, \quad \overline{(z_1 z_2)} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

Conjugué : règles de calcul

Proposition

Soient $z = x + iy \in \mathbb{C}$*. Donc* $\bar{z} = x - iy$*.*

- $\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z)$.
- $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.
- $z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z = \bar{z}$.
- $z \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z + \bar{z} = 0$.
- $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ $\quad \overline{(\bar{z})} = z$, $\quad \overline{(z_1 z_2)} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.
- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $\quad \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}$

Exercice 4

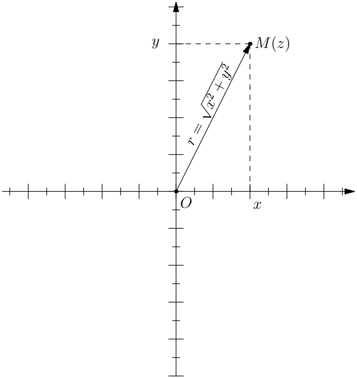
1. Calculer $\overline{2 + 3i}$.
2. Résoudre $z + 2\bar{z} = 0$.
3. Prouver toutes les relations ci-dessus !

Module

Definition

On appelle module de $z = x + iy \in \mathbb{C}$, le réel positif

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Utilisation de la conjugaison pour le calcul de $\frac{z}{z'}$

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $z' \neq 0$.

On a

$$\frac{z}{z'} =$$

Module

Proposition

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

- $|z| = |-z| = |\bar{z}|, \quad |x| \leqslant |z|, \quad |y| \leqslant |z|.$
- $|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0.$
- $|zz'| = |z||z'|, \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}, \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}.$
- $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ *(inégalité triangulaire pour le module).*

Exercice 5 (Excellent entraînement !)

1. Illustrer les relations qui peuvent l'être avec des dessins.
2. Prouver toutes ces relations.

Lieux géométriques : le cercle

Proposition

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \geqslant 0$. L'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| = r\},$$

représente dans le plan complexe le cercle de centre Ω (d'affixe z_0) et de rayon r.

Lieux géométriques : la médiatrice

Proposition

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. L'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - a| = |z - b|\},$$

représente dans le plan complexe la médiatrice du segment $[AB]$, où A et B sont les points d'affixes a et b respectivement.

Lieux géométriques : la droite

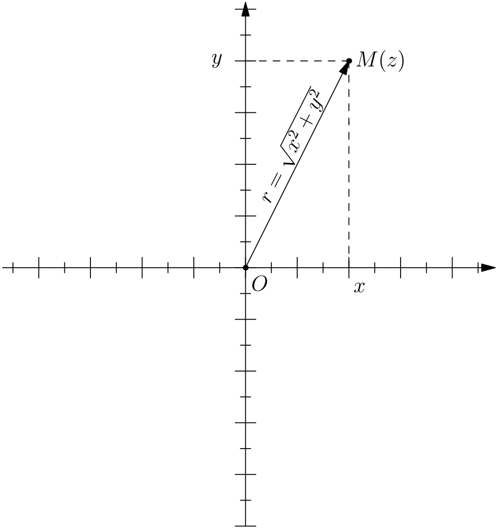
Proposition

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. L'ensemble

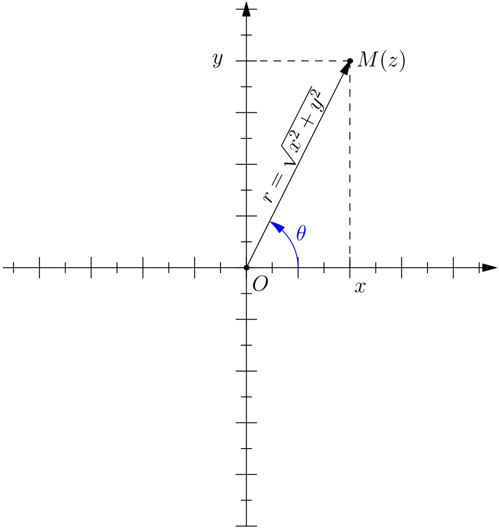
$$\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(az) = \alpha\},$$

représente dans le plan complexe une droite (qui passe par le point d'affixe $\frac{\alpha}{a}$).

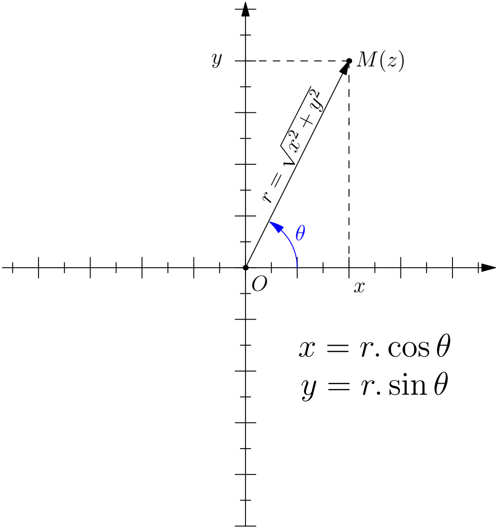
Argument d'un nombre complexe



Argument d'un nombre complexe



Argument d’un nombre complexe



$$x = r.\cos\theta$$
$$y = r.\sin\theta$$

Argument d'un nombre complexe

Definition

On dit qu'un réel $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument du nombre complexe $z = x + iy$, $z \neq 0$, s'il vérifie

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

Argument d'un nombre complexe

Definition

On dit qu'un réel $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument du nombre complexe $z = x + iy$, $z \neq 0$, s'il vérifie

$$\begin{cases} \cos(\theta) &= \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin(\theta) &= \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

On a alors

$$z = |z|\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \underbrace{|z|(\cos\theta + i\sin\theta).}_{\text{écriture trigonométrique de } z}$$

Argument d'un nombre complexe

Definition (Argument principal)

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

L'unique argument $\theta \in \mathbb{R}$ de z satisfaisant $\theta \in [0, 2\pi[$ est appelé l'argument principal de z et noté $\arg(z)$.

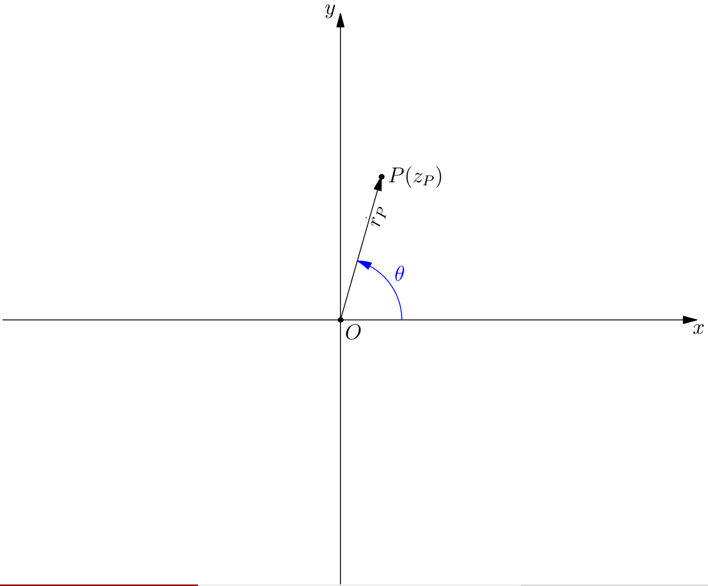
Représentation de la multiplication

Example

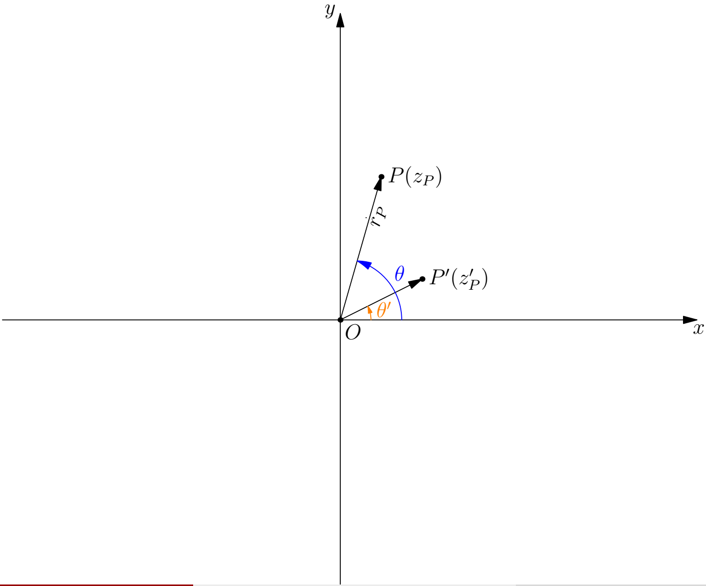
Prendre des exemples simples de nombres complexes z, z', les multiplier et interpréter géométriquement le résultat.

Représentation de la multiplication

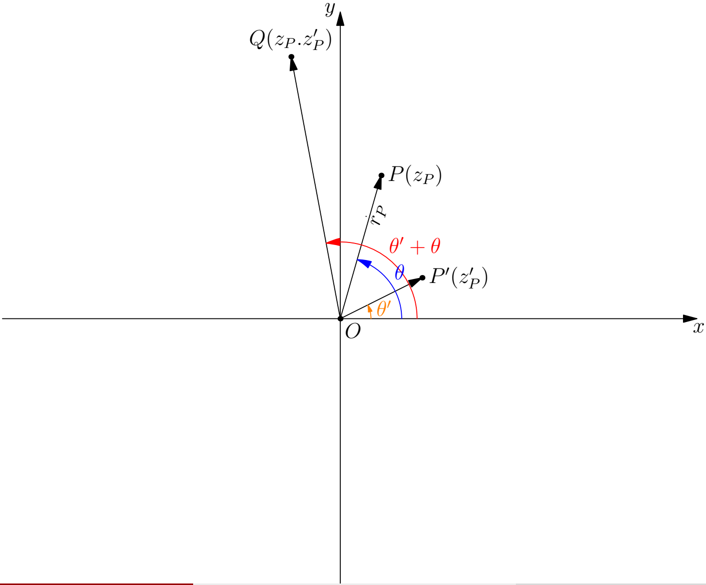
Représentation de la multiplication



Représentation de la multiplication



Représentation de la multiplication



Argument d'un produit

On observe donc la règle suivante :

Proposition

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi],$$

c-à-d existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi.$$

Plus généralement : multiplier deux nombres complexes semble revenir à

- multiplier leurs modules,
- ajouter leurs arguments et prendre le résultat modulo 2π.

Section 3

Différentes manières d'écrire un nombre complexe

Résumé. Pour l'instant, deux manières d'écrire un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$:

1. algébrique : $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$

Résumé. Pour l'instant, deux manières d'écrire un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$:

1. algébrique : $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$
2. trigonométrique : $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec θ un argument de z.

Remarque

Tous les $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sont des arguments de z.

Exemples d'écritures trigonométriques.

- Soit $z = 1 + i$. On a $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Donc

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right).$$

  Et $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$.

- Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$.

Exemples d'écritures trigonométriques.

- Soit $z = 1 + i$. On a $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Donc

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right).$$

Et $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$.

- Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$. Donc $|z| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Exemples d'écritures trigonométriques.

- Soit $z = 1 + i$. On a $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Donc
$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right).$$
Et $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$.
- Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$. Donc $|z| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ et
$$z = 2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right),$$
$$= 2\sqrt{3}\left(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})\right).$$
D'où $\arg(z) = \frac{\pi}{6}$.

Exemples d'écritures trigonométriques.

- Soit $z = 1 - i\sqrt{3}$, donc $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ et

$$z = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos(\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{3})\right).$$

D'où $\arg(z) = \frac{5\pi}{3}$.

Angles remarquables à connaître

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Angles remarquables à connaître

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Exercice 7

Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique.

1. $z_1 = -3 + 3i$.
2. $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$.
3. $z_3 = 3\sqrt{3} - 3i$.
4. $z_4 = 8i$.
5. $z_5 = -2$.

Définition : exponentielle complexe

Comment avez-vous défini la fonction exponentielle ?

Définition : exponentielle complexe

Comment avez-vous défini la fonction exponentielle ?

Definition (Exponentielle par les séries)

Pour $x \in \mathbb{R}$

$$e^{x} \stackrel{\text{def.}}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Correspond à la fonction exponentielle que vous connaissez !

Définition : exponentielle complexe

Remarque

La quantité $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$ est toujours bien définie en remplaçant $x \in \mathbb{R}$ par $z \in \mathbb{C}$.

Définition : exponentielle complexe

Remarque

La quantité $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$ est toujours bien définie en remplaçant $x \in \mathbb{R}$ par $z \in \mathbb{C}$.

Definition (Exponentielle complexe par les séries)

Pour $z \in \mathbb{C}$

$$e^z \stackrel{\text{def.}}{=} 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Définition : exponentielle complexe

Remarque

La quantité $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$ est toujours bien définie en remplaçant $x \in \mathbb{R}$ par $z \in \mathbb{C}$.

Definition (Exponentielle complexe par les séries)

Pour $z \in \mathbb{C}$

$$e^z \stackrel{\text{def.}}{=} 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

Théorème

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors

$$e^{z+z'}=e^z e^{z'}.$$

Définition : exponentielle complexe

Théorème

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}.$$

Corollaire

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors

1. $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.
2. $\frac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$.
3. $\left(e^z\right)^n = e^{nz}$.
4. $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

Formule d'Euler

Théorème (Formule d'Euler)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, alors

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Formule d’Euler

Théorème (Formule d’Euler)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, *alors*

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Démonstration.

Hors programme ! Idées sans les détails

`https://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_d’Euler#/media/Fichier:Euler’s_formula_proof.gif`

□

Écriture exponentielle des nombres complexes

Théorème (Écriture exponentielle)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de z. Alors

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Écriture exponentielle des nombres complexes

Théorème (Écriture exponentielle)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de z. Alors

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Corollaire (Argument d'un produit)

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a vu $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$.

Écriture exponentielle des nombres complexes

Théorème (Écriture exponentielle)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de z. Alors

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Corollaire (Argument d'un produit)

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a vu $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$.

Démonstration.

On a $z = |z|e^{i\theta}$, $z' = |z'|e^{i\theta'}$, avec $\theta = \arg(z)$ et $\theta' = \arg(z')$. Donc

$$zz' = |z||z'|e^{i\theta}e^{i\theta'} = |zz'|e^{i(\theta+\theta')},$$

donc $\theta + \theta'$ est un argument de zz', donc $\arg(zz') = (\theta + \theta')[2\pi]$. ∎

Écriture exponentielle des nombres complexes

Corollaire (Argument d'un quotient)

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, $z' \neq 0$. *On a* $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$.

En particulier $\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg(z')[2\pi]$.

Écriture exponentielle des nombres complexes

Corollaire (Argument d'un quotient)

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, $z' \neq 0$. *On a* $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$.
En particulier $\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg(z')[2\pi]$.

Démonstration.

On a $z = |z|e^{i\theta}$, $z' = |z'|e^{i\theta'}$, avec $\theta = \arg(z)$ et $\theta' = \arg(z')$. Donc

$$\frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|}e^{i\theta}\frac{1}{e^{i\theta'}} = \left|\frac{z}{z'}\right|e^{i(\theta-\theta')},$$

donc $\theta - \theta'$ est un argument de $\frac{z}{z'}$, donc $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = (\theta - \theta')[2\pi]$. □

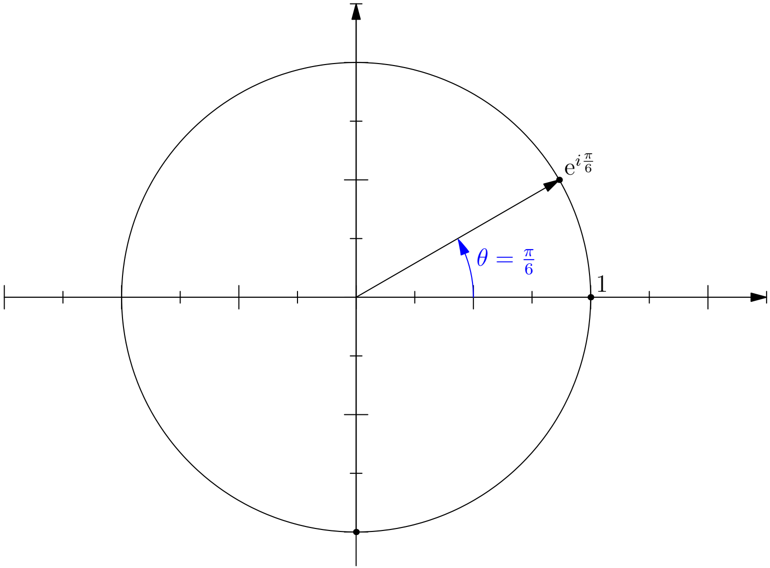
Les nombres complexes de module 1

Definition (L'ensemble $\mathbb{U}$)

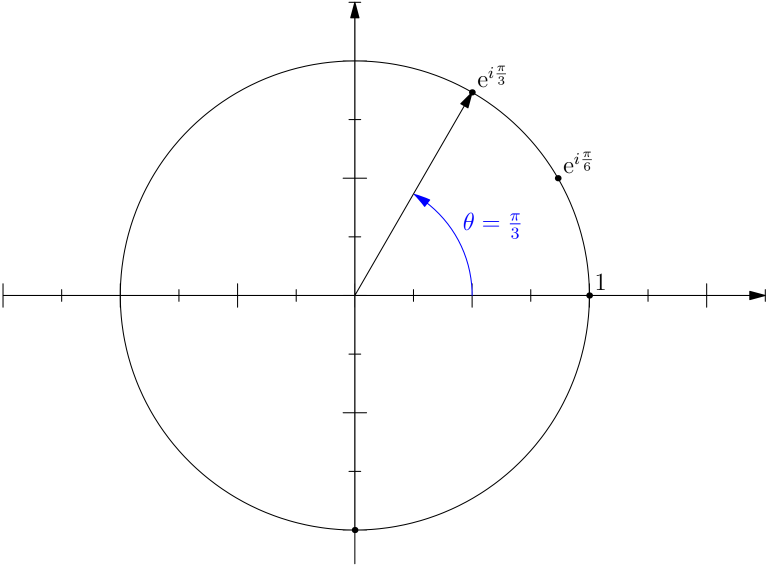
On appelle ensemble des nombres complexes de module 1, ou cercle unité, l'ensemble

$$\begin{aligned}\mathbb{U} &= \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\},\\ &= \{\cos(\theta) + i\sin(\theta) / \theta \in \mathbb{R}\} = \{\cos(\theta) + i\sin(\theta) / \theta \in [0, 2\pi[\},\\ &= \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\} = \{e^{i\theta} / \theta \in [0, 2\pi[\}.\end{aligned}$$

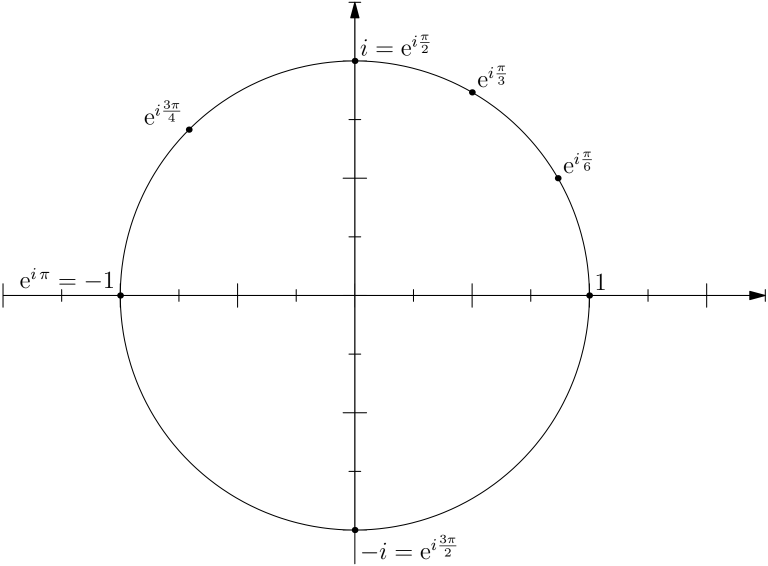
Les nombres complexes de module 1



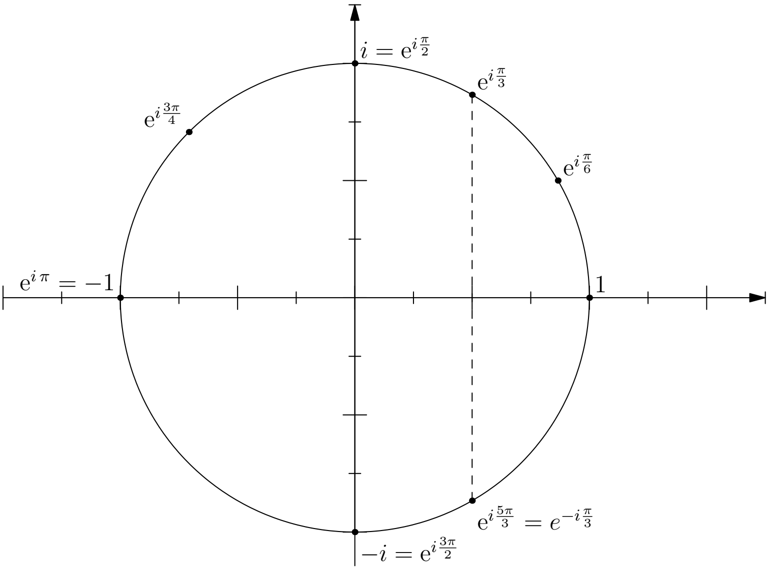
Les nombres complexes de module 1

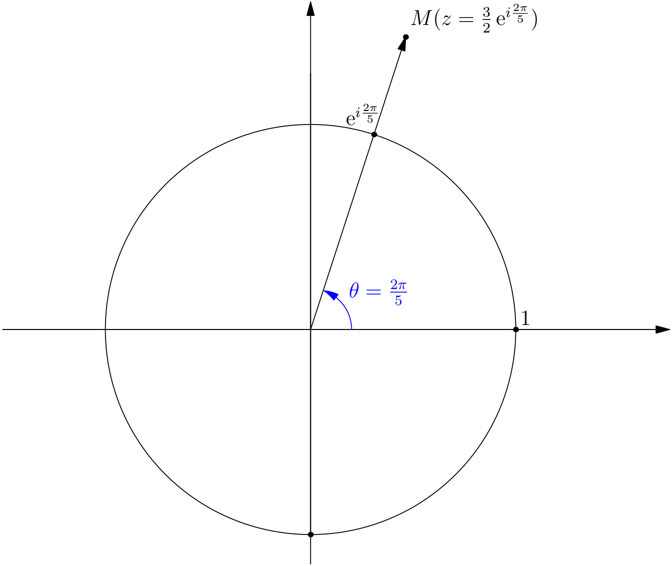


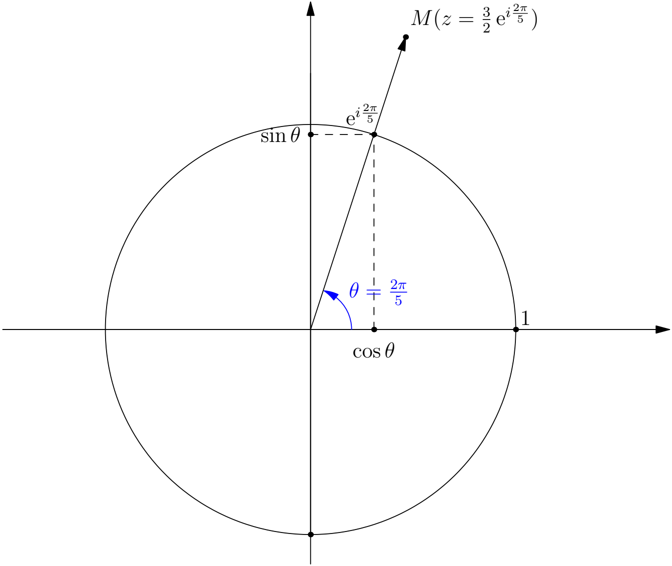
Les nombres complexes de module 1



Les nombres complexes de module 1




$M(z = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}})$
$\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}$
$\theta = \frac{2\pi}{5}$
1


$M(z = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}})$
$\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}$
$\sin\theta$
$\theta = \frac{2\pi}{5}$
1
$\cos\theta$

Section 4

Applications

Théorème (Formule de Moivre)

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

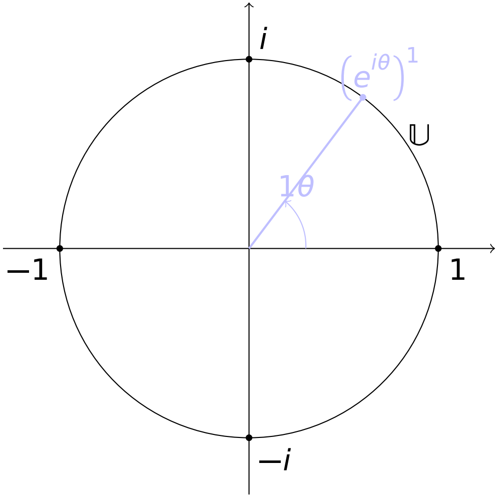
Théorème (Formule de Moivre)

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$

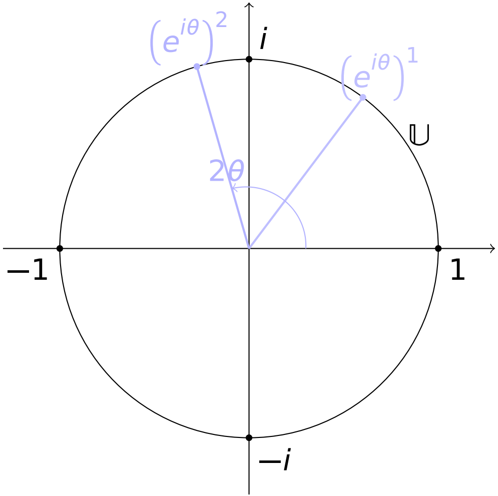
$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Démonstration.

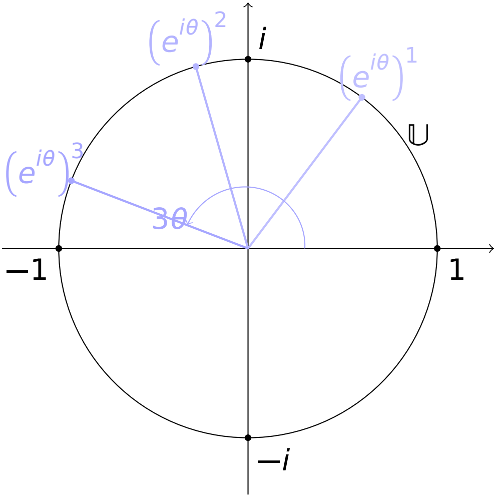
On a $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$. □



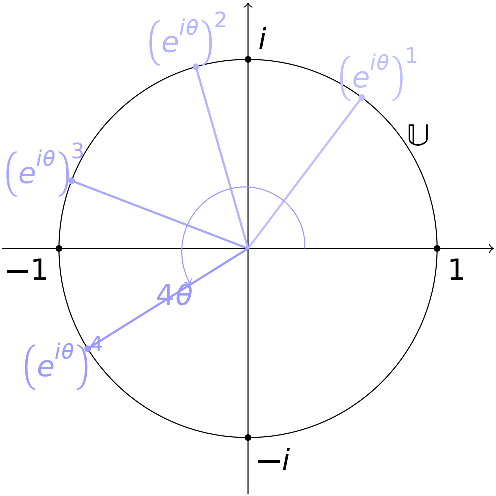
Premières valeurs de $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.



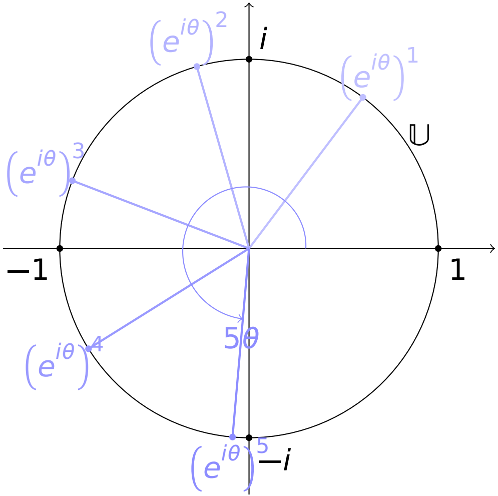
Premières valeurs de $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.



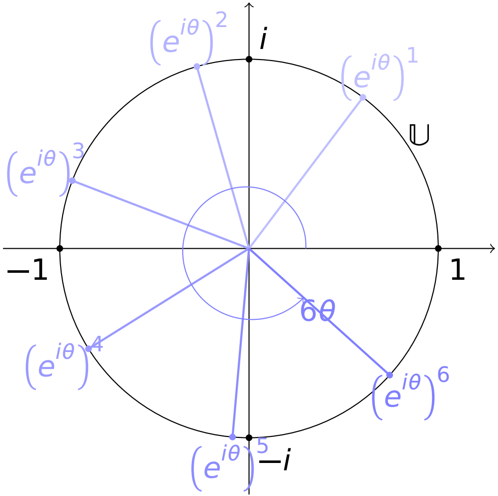
Premières valeurs de $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.



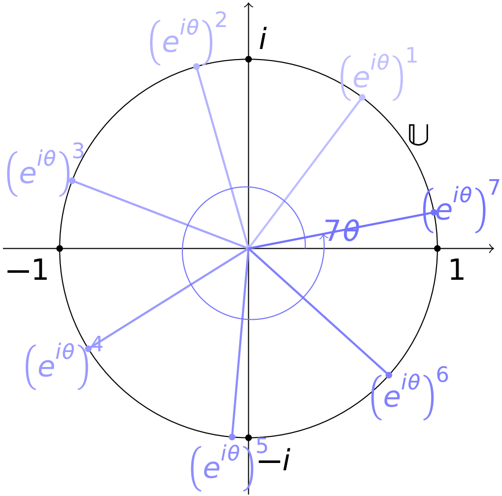
Premières valeurs de $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.



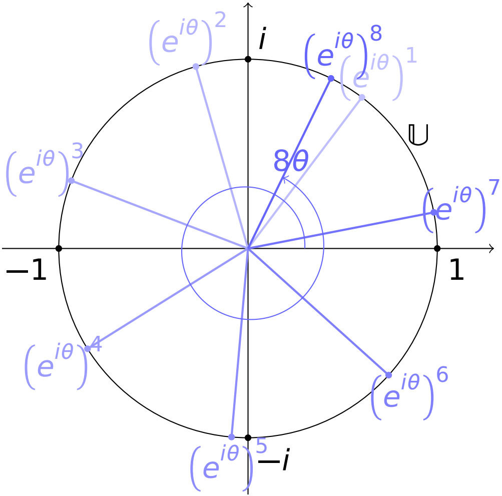
Premières valeurs de $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.



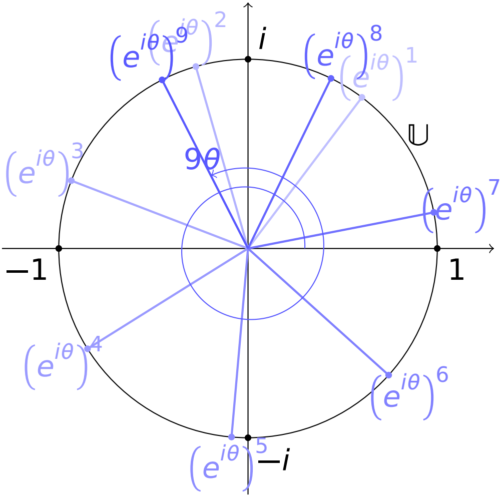
Premières valeurs de $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.



Premières valeurs de $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.



Premières valeurs de $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.



Premières valeurs de $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Exercice 8
Quelle condition sur $\theta \in \mathbb{R}$ pour que la suite $\left(e^{in\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit périodique ?

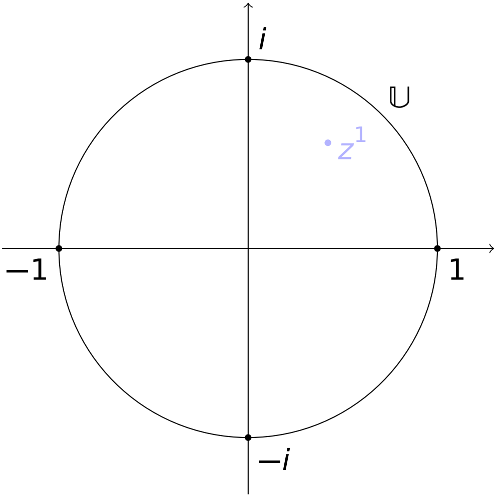
Puissance entière d'un nombre complexe

Proposition

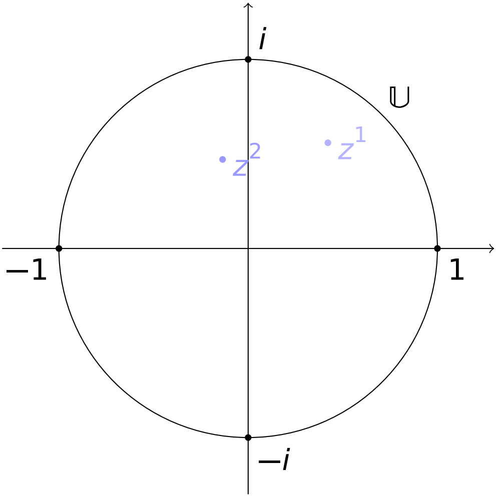
Soit $z \in \mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$*. On a* $z = |z|e^{i\theta}$ *avec* $\theta \in \mathbb{R}$ *un argument de* z*. Alors*

$$z^n = \left(|z|e^{i\theta}\right)^n = |z|^n e^{in\theta} = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

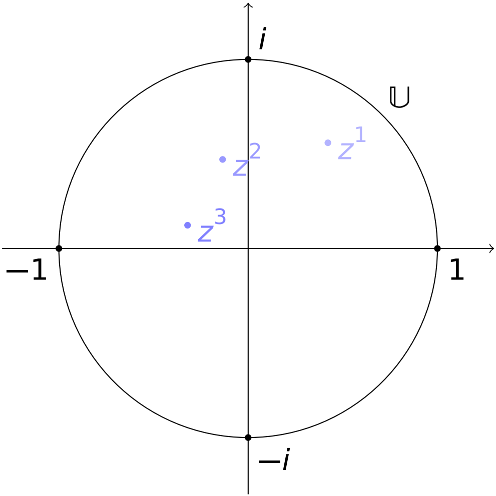
En particulier $\arg(z^n) = n\arg(z)[2\pi]$*.*



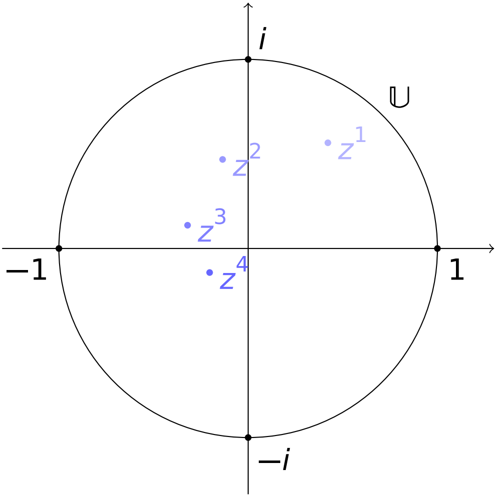
Premières valeurs de z^n lorsque $|z| < 1$.



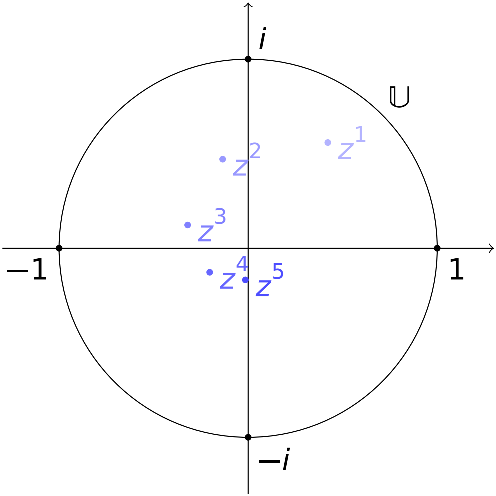
Premières valeurs de z^n lorsque $|z| < 1$.



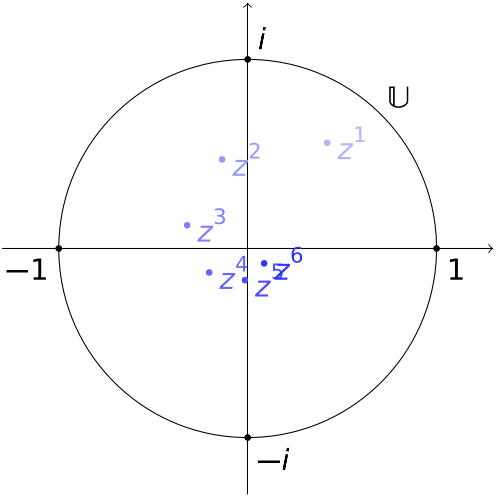
Premières valeurs de z^n lorsque $|z| < 1$.



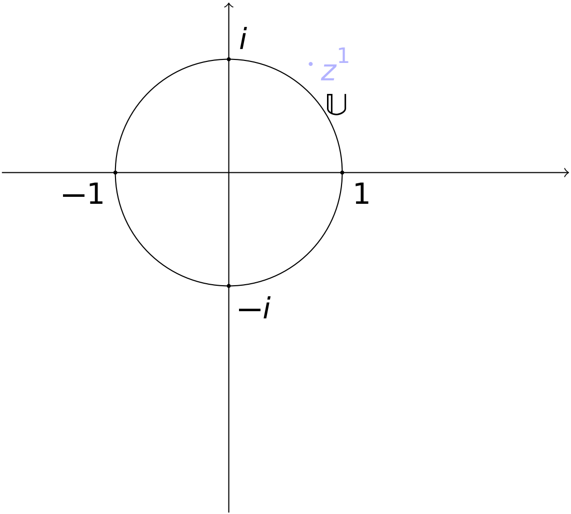
Premières valeurs de z^n lorsque $|z| < 1$.



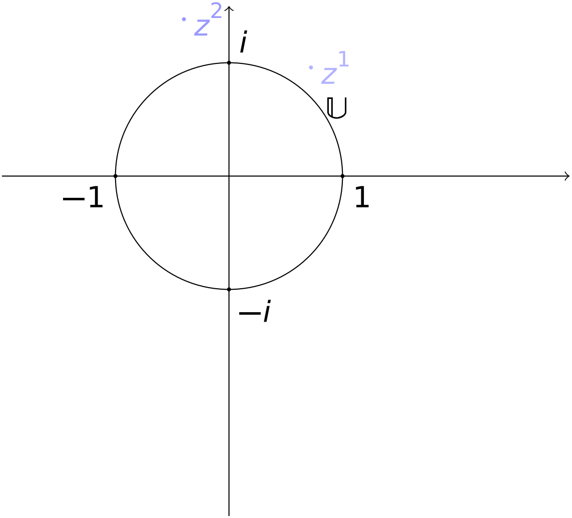
Premières valeurs de z^n lorsque $|z| < 1$.



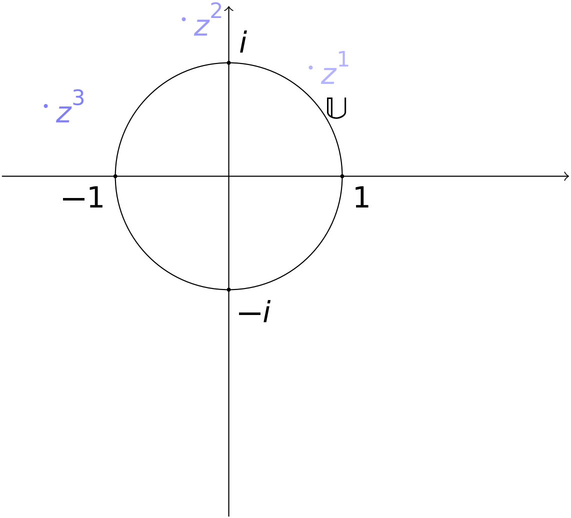
Premières valeurs de z^n lorsque $|z| < 1$.



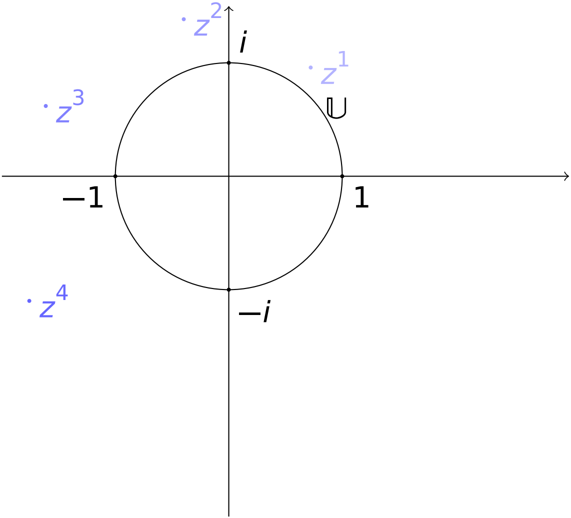
Premières valeurs de z^n lorsque $|z| > 1$.



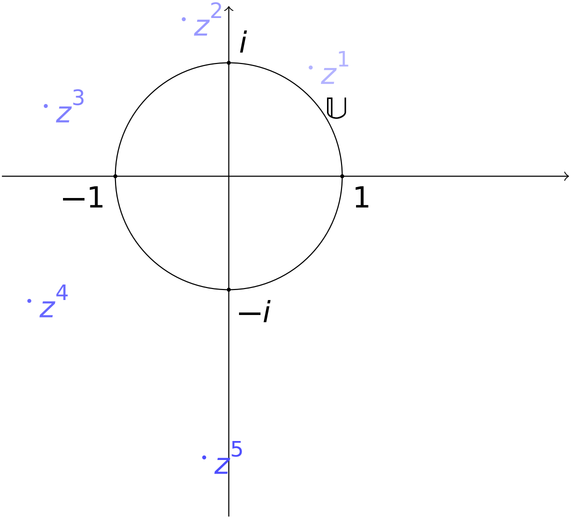
Premières valeurs de z^n lorsque $|z| > 1$.



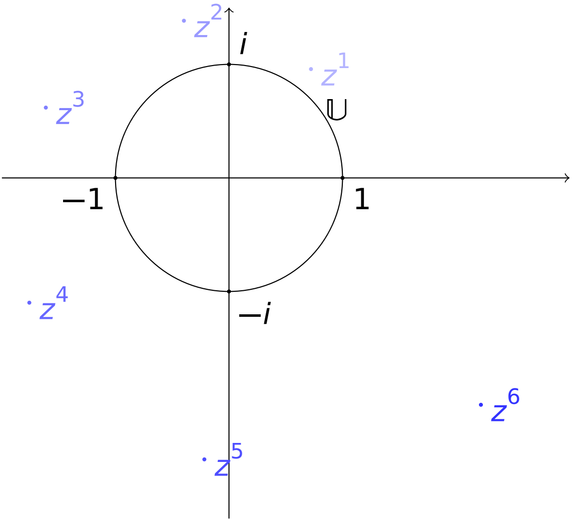
Premières valeurs de z^n lorsque $|z| > 1$.



Premières valeurs de z^n lorsque $|z| > 1$.



Premières valeurs de z^n lorsque $|z| > 1$.



Premières valeurs de z^n lorsque $|z| > 1$.

Racines carrées d'un nombre complexe

Problème. Soit $a \in \mathbb{C}$. On recherche les deux racines carrées de a i.e. les $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = a$.

Racines carrées d'un nombre complexe

Problème. Soit $a \in \mathbb{C}$. On recherche les deux racines carrées de a i.e. les $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = a$.

Méthode 1 : via l'écriture exponentielle de a.

Proposition

Notons $\theta = \arg(a)$, donc $a = |a|e^{i\theta}$. Alors les racines carrées de a sont

$$\pm\sqrt{|a|}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Racines carrées d'un nombre complexe

Problème. Soit $a \in \mathbb{C}$. On recherche les deux racines carrées de a i.e. les $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = a$.

Méthode 1 : via l'écriture exponentielle de a.

Proposition

Notons $\theta = \arg(a)$, donc $a = |a|e^{i\theta}$. Alors les racines carrées de a sont

$$\pm\sqrt{|a|}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Démonstration.

Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et posons $z = \varepsilon\sqrt{|a|}e^{i\frac{\theta}{2}}$. Alors

$$z^2 =$$

□

Racines carrées d'un nombre complexe

Example

Déterminer les racines carrées complexes de $\Delta = 1 + i\sqrt{3}$.

Racines carrées d'un nombre complexe

Remarque

Parfois il n'est pas évident de trouver un argument θ tel que $a = |a|e^{i\theta}$.

Racines carrées d'un nombre complexe

Remarque

Parfois il n'est pas évident de trouver un argument θ tel que $a = |a|e^{i\theta}$.

Méthode 2 : par identification des écritures algébriques.

Notons $a = \alpha + i\beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On a

$$z^2 = a \quad \Leftrightarrow \quad (x+iy)^2 = \alpha + i\beta,$$

Racines carrées d'un nombre complexe

Remarque

Parfois il n'est pas évident de trouver un argument θ tel que $a = |a|e^{i\theta}$.

Méthode 2 : par identification des écritures algébriques.

Notons $a = \alpha + i\beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} z^2 = a \quad & \Leftrightarrow \quad (x+iy)^2 = \alpha + i\beta, \\ & \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 + 2ixy = \alpha + i\beta, \end{aligned}$$

Racines carrées d'un nombre complexe

Remarque

Parfois il n'est pas évident de trouver un argument θ tel que $a = |a|e^{i\theta}$.

Méthode 2 : par identification des écritures algébriques.

Notons $a = \alpha + i\beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} z^2 = a \quad & \Leftrightarrow \quad (x+iy)^2 = \alpha + i\beta, \\ & \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 + 2ixy = \alpha + i\beta, \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x^2 - y^2 & = & \alpha, \\ 2xy & = & \beta, \end{array} \right. \end{aligned}$$

Racines carrées d'un nombre complexe

Remarque

Parfois il n'est pas évident de trouver un argument θ tel que $a = |a|e^{i\theta}$.

Méthode 2 : par identification des écritures algébriques.

Notons $a = \alpha + i\beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned}
z^2 = a \quad &\Leftrightarrow \quad (x+iy)^2 = \alpha + i\beta, \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 + 2ixy = \alpha + i\beta, \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 &= \alpha, \\ 2xy &= \beta, \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 &= \alpha, \\ 2xy &= \beta, \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{|a|}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Racines carrées d’un nombre complexe

Example

Trouver les racines carrées de $3+4i$.

Cas général : équation du second degré

Problème. On souhaite trouver les deux racines de l'équation polynomiale de degré 2 : $az^2 + bz + c = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Cas général : équation du second degré

Problème. On souhaite trouver les deux racines de l'équation polynomiale de degré 2 : $az^2 + bz + c = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Proposition

Notons $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ le discriminant de l'équation. Soit $\delta \in \mathbb{C}$ une racine carrée (complexe) de Δ. Alors l'ensemble des racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ est

$$\left\{ \frac{-b-\delta}{2a}, \frac{-b+\delta}{2a} \right\}.$$

Cas général : équation du second degré

Démonstration.

$$az^2 + bz + c =$$

□

Cas général : équation du second degré

Example

Trouver les racines complexes des équations suivantes.

1. $z^2 + z - 6 = 0$.
2. $2z^2 - 2z + 1 = 0$.
3. $iz^2 - 2z + 1 = 0$.

Somme de puissances

Proposition

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} b^{n+1} - a^{n+1} &= (b-a)(b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \ldots + b^1 a^{n-1} + a^n), \\ &= (b-a)\sum_{k=0}^{n} b^{n-k}a^k = (b-a)\sum_{k=0}^{n} b^k a^{n-k}. \end{aligned}$$

Somme de puissances

Corollaire (Somme géométrique)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,
$z^{n+1} - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + \cdots\cdots + z^n)$*, et donc, si $z \neq 1$*

$$1 + z + z^2 + \cdots\cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Le binôme de Newton

Proposition (Binôme de Newton)

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

avec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ *et* $k! = 1 \times 2 \times \cdots \times k$.

Example

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

Le binôme de Newton

Exercice 9
Soit $z = 2 - i$. Mettre z^4, puis $1 + z + z^2 + z^3$ sous la forme algébrique.

cos et sin via exponentielles complexes

Proposition

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad et \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration.

Par la formule d'Euler : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Donc $\square$

Application : linéarisation des puissances de $\sin$ et $\cos$

Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite transformer $\cos(\theta)^n$ et $\sin(\theta)^n$ en somme de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Application : linéarisation des puissances de $\sin$ et $\cos$

Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite transformer $\cos(\theta)^n$ et $\sin(\theta)^n$ en somme de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$.

Très utile en MC2 pour les calculs de primitives !

Application : linéarisation des puissances de sin et cos

Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite transformer $\cos(\theta)^n$ et $\sin(\theta)^n$ en somme de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Très utile en MC2 pour les calculs de primitives !

Méthode.

- Remplacer $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ par leurs expressions via exponentielles complexes,
- développer (éventuellement par binôme de Newton),
- regrouper les exponentielles dont les arguments dépendent de $k\theta$ pour faire apparaître $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$.

Application : linéarisation des puissances de $\sin$ et $\cos$

Example

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On veut linéariser $\cos(\theta)^3$.

$$\cos(\theta)^3 = \quad ,$$

$$,$$

$$,$$

$$.$$

Application : linéarisation des puissances de sin et cos

Example

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On veut linéariser $\cos(\theta)^3$.

$$\cos(\theta)^3 = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3,$$

,

,

.

Application : linéarisation des puissances de $\sin$ et $\cos$

Example

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On veut linéariser $\cos(\theta)^3$.

$$\begin{aligned}\cos(\theta)^3 &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3,\\ &= \frac{1}{2^3}\left(e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}\right),\end{aligned}$$

,

.

Application : linéarisation des puissances de $\sin$ et $\cos$

Example

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On veut linéariser $\cos(\theta)^3$.

$$\begin{aligned}
\cos(\theta)^3 &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3, \\
&= \frac{1}{2^3}\left(e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}\right), \\
&= \frac{1}{2^3}\left(\left(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}\right) + 3\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\right),
\end{aligned}$$

.

Application : linéarisation des puissances de $\sin$ et $\cos$

Example

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On veut linéariser $\cos(\theta)^3$.

$$\begin{aligned}
\cos(\theta)^3 &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3, \\
&= \frac{1}{2^3}\left(e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}\right), \\
&= \frac{1}{2^3}\left(\left(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}\right)+3\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right), \\
&= \frac{1}{2^3}\left(2\cos(3\theta)+6\cos(\theta)\right) = \frac{1}{4}\cos(3\theta)+\frac{3}{4}\cos(\theta).
\end{aligned}$$

Application : linéarisation des puissances de sin et cos

Example

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On veut linéariser $\sin(\theta)^3$.

$$\begin{aligned}
\sin(\theta)^3 &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2i}\right)^3, \\
&= \frac{1}{(2i)^3}\left(e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}\right), \\
&= \frac{1}{(2i)^3}\left(\left(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}\right) - 3\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\right), \\
&= \frac{1}{(2i)^3}\left(2i\sin(3\theta) - 6i\sin(\theta)\right) = -\frac{1}{4}\sin(3\theta) + \frac{3}{4}\sin(\theta).
\end{aligned}$$

Application : linéarisation des puissances de $\sin$ et $\cos$

Exercice 10
Linéariser $\cos(\theta)^4$ et $\sin(\theta)^4$.

Application : procédé inverse à la linéarisation

Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite transformer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en somme de $\cos(\theta)^k$ et $\sin(\theta)^k$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Méthode.

- Écrire $\cos(n\theta)$, respectivement $\sin(n\theta)$, comme la partie réelle, resp. imaginaire, de $e^{in\theta}$,
- utiliser la formule d'Euler,
- développer.

Application : procédé inverse à la linéarisation

Example

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\cos(4\theta) = \mathrm{Re}(e^{i4\theta}) = \mathrm{Re}((e^{i\theta})^4) = \mathrm{Re}((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4),$$
$$\sin(4\theta) = \mathrm{Im}(e^{i4\theta}) = \mathrm{Im}((e^{i\theta})^4) = \mathrm{Im}((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4).$$

Or

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^4 &= \cos(\theta)^4 + 4i\cos(\theta)^3\sin(\theta)\\ &+ 6i^2\cos(\theta)^2\sin(\theta)^2 + 4i^3\cos(\theta)\sin(\theta)^3\\ &+ i^4\sin(\theta)^4.\end{aligned}$$

Donc

$$\cos(4\theta) = \cos(\theta)^4 - 6\cos(\theta)^2\sin(\theta)^2 + \sin(\theta)^4,$$
$$\sin(4\theta) = 4\cos(\theta)^3\sin(\theta) - 4\cos(\theta)\sin(\theta)^3.$$

Application : procédé inverse à la linéarisation

Exercice 11

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Sinus d'une somme, cosinus d'une somme

Il est important de savoir retrouver rapidement les formules suivantes. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b),$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

Méthode. On passe de nouveau par les exponentielles complexes.

Somme de sinus, somme de cosinus

Il est important de savoir retrouver rapidement les formules suivantes. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

$$\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Méthode. On passe de nouveau par les exponentielles complexes.

Somme de sinus, somme de cosinus

Quelques relations très utiles, à connaître

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) =$$

$$\cos(\pi - \theta) =$$

$$\cos(\pi + \theta) =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) =$$

$$\sin(\pi - \theta) =$$

$$\sin(\pi + \theta) =$$