

Licence 1ère année Mathématiques et Calcul 1

Quentin Denoyelle
quentin.denoyelle@u-paris.fr

(avec la collaboration de A. Chambaz, L. Moisan et F. Benaych)

UFR de Mathématiques et Informatique
Université Paris Cité, Campus Saint-Germain-des-Près

11 octobre 2025

Chapitre 0 : Notions Structurantes

- 1 Éléments de Logique
 - Quantificateurs et négation
 - Ordre des quantificateurs

- 2 Rudiments de Théorie des Ensembles
 - Généralités
 - Le cas particulier de $\mathbb{R}$

- 3 Notions de Fonctions

Section 1

Éléments de Logique

Introduction

Les énoncés mathématiques, ou *assertions*, *propriétés* ou encore *propositions*, sont formés à partir

- ▶ de variables x , y etc...,
- ▶ de relations entre variables (appartenance, égalité etc...), que l'on appelle des prédicats,
- ▶ d'opérations logiques (et, ou, négation, implique, équivalence) qui permettent d'imbriquer les prédicats,
- ▶ des quantificateurs (il existe, quelque soit).

Définition

Definition (Quantificateurs)

- ▶ L'expression "*pour tout*" ou "*quelque soit*" représentée par le symbole $\forall$.
- ▶ L'expression "*il existe*" représentée par le symbole $\exists$.

Example

Soit pour $x \in \mathbb{N}$, le prédicat $P(x) = "x \text{ est impair}"$. Deux assertions utilisant $\forall, \exists$:

- ▶ $\forall x \in \mathbb{N}, P(x),$
- ▶ $\exists x \in \mathbb{N}, P(x).$

Exercice 1

Pour $x \in \mathbb{N}$, écrire le prédicat $P(x)$ ("x est impair") grâce à des quantificateurs.

Remarque

Point rédaction sur l'usage des quantificateurs : ne pas mélanger les symboles et du texte !

Négation d'assertion

Soient P et Q deux prédicats.

Énoncé	Négation
non P	P
P ou Q	non P et non Q
P et Q	non P ou non Q
$P \Rightarrow Q$	P et non Q
$\forall x \in X, P(x)$	$\exists x \in X, \text{ non } P(x)$
$\exists x \in X, P(x)$	$\forall x \in X, \text{ non } P(x)$

Definition (Implication : $\Rightarrow$)

$P \Rightarrow Q$ s'écrit :

Contraposée de $P \Rightarrow Q$:

Négation d'assertion

Énoncé	Négation
non P	P
P ou Q	non P et non Q
P et Q	non P ou non Q
$P \Rightarrow Q$	P et non Q
$\forall x \in X, P(x)$	$\exists x \in X, \text{ non } P(x)$
$\exists x \in X, P(x)$	$\forall x \in X, \text{ non } P(x)$

Exercice 2

Écrire la négation des deux assertions suivantes :

- $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, 2^{-n} < \varepsilon.$
- Soit $I \subset \mathbb{R}$. Assertion :
 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x, y \in I \text{ et } x \leq z \leq y) \Rightarrow z \in I.$

Attention à l'ordre des quantificateurs

Il faut retenir que pour maintenir le sens d'une assertion :

- ▶ on ne peut pas permuter des symboles $\exists$ et $\forall$ consécutifs,
- ▶ on peut permuter des $\forall$ consécutifs,
- ▶ on peut permuter des $\exists$ consécutifs.

Exemple

- ▶ $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, 2^{-n} < \varepsilon$, est une assertion VRAI.
- ▶ Par contre : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \forall n \geq N, 2^{-n} < \varepsilon$, est FAUSSE.

Section 2

Rudiments de Théorie des Ensembles

Définitions de base

Definition (Union, intersection...)

Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E . On définit :

- ▶ $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$,
- ▶ $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$,
- ▶ $\complement_E A = \{x \in E / x \notin A\}$ souvent noté A^c ,
- ▶ $B \setminus A = B \cap A^c$.

Puis les relations :

- ▶ $A \subset B$ si et seulement si $\forall a \in A, a \in B$,
- ▶ $A = B$ si et seulement si $(A \subset B \text{ et } B \subset A)$,
- ▶ $A = \emptyset$ si et seulement si $\forall x \in E, x \notin A$,

Définitions de base

Exercice 3

Soient A, B deux sous ensembles de E . Montrer que $A \subset B$ si et seulement si $B^c \subset A^c$.

Exercice 4

Soient A, B deux sous ensembles de E . Représenter schématiquement l'ensemble $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Definition (Produit cartésien)

Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et F , noté $E \times F$ est l'ensemble

$$E \times F = \{(x, y) / x \in E, y \in F\}.$$

Exemple

- ▶ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ noté $\mathbb{R}^2$,
- ▶ $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$,
- ▶ $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- ▶ ...

Exercice sur le produit cartésien

Exercice 5

Représenter les ensembles $[0, 1] \times [-1, 2]$, $\{-1\} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \times \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 1\}$, $\{1\} \times \mathbb{Q}$.

Exercice sur le produit cartésien

On admet l'existence de l'ensemble des nombres réels et celles des opérations d'addition et de multiplication. On admet que $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$ totale.

Definition (Partie entière)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on admet l'existence d'un unique entier relatif, noté $E(x)$, caractérisé par :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

On appelle $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ la fonction partie entière.

Notion d'intervalle

Definition (Intervalle)

Un sous ensemble I de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x, y \in I \text{ et } x \leq z \leq y) \Rightarrow z \in I.$$

Ce qui s'écrit encore

$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I.$$

Exercice 6

Écrire la négation de ces assertions.

Notion d'intervalle

Exemple

$[0, 1],]-1, 2], [-\pi, \frac{2}{3}[,]0, 1[,]2, +\infty[,]-\infty, -1], \mathbb{R}$ sont des intervalles.

$\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, [0, 1] \cup [2, 3]$ ne sont pas des intervalles.

Majorant, minorant et conséquences

Definition

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $m, M \in \mathbb{R}$.

1. M est un majorant de A si pour tout $a \in A$, $a \leq M$.
2. m est un minorant de A si pour tout $a \in A$, $m \leq a$.
3. A est majoré (respectivement minoré) si A admet un majorant (resp. minorant), ce qui s'écrit

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leq M,$$

(resp. : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall a \in A, m \leq a$).

Majorant, minorant et conséquences

Exercice 7

Montrer que $\mathbb{N}$ est minoré par 0, mais n'est pas majoré.

1. M est un majorant de A si pour tout $a \in A$, $a \leq M$.
2. m est un minorant de A si pour tout $a \in A$, $m \leq a$.

Majorant, minorant et conséquences

Exercice 8

Montrer que $\mathbb{Z}$ n'est ni minoré, ni majoré.

Valeur absolue

Definition (Valeur absolue)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle valeur absolue de x la quantité

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

En particulier $|x| \geq 0$ et $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Proposition (Inégalité triangulaire)

Soient $x, y, M \in \mathbb{R}$. Alors

1. *Inégalité triangulaire* : $|x + y| \leq |x| + |y|$.
2. *Inégalité triangulaire inverse* : $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

Majorant, minorant et conséquences

Definition (Ensemble borné)

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dira que A est borné s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $a \in A$, $|a| \leq M$.

Example

$[-3, 1]$ est borné car pour tout $x \in [-3, 1]$, on a $|x| \leq 3$.

Definition (Maximum, minimum)

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$.

M est le maximum de A (ou plus grand élément de A) et on note $M = \max(A)$ si

- ▶ M est un majorant de A ,
- ▶ $M \in A$.

Pour le *minimum* : remplacer "majorant" par "minorant".

Section 3

Notions de Fonctions

Définition d'une fonction

Soient E, F deux ensembles.

Definition (Fonction)

Une fonction f de E dans F , noté $f : E \rightarrow F$, est un objet caractérisé par la donnée de :

- ▶ un espace de départ, ici E ,
- ▶ un espace d'arrivée, ici F ,
- ▶ un sous ensemble $\mathcal{G}_f$ de $E \times F$, appelé *graphe* de f , tel que

$$\forall x \in E, \forall (y, y') \in F^2, ((x, y) \in \mathcal{G}_f \text{ et } (x, y') \in \mathcal{G}_f) \Rightarrow y = y'.$$

Pour $(x, y) \in \mathcal{G}_f$, on écrira en pratique que $y = f(x)$, y est l'image de x par f .

Le domaine de définition de f est $D_f = \{x \in E / \exists y \in F, y = f(x)\}$.

Définition d'une fonction

Interprétation de la condition :

$$\forall (x, y, y') \in F, ((x, y) \in \mathcal{G}_f \text{ et } (x, y') \in \mathcal{G}_f) \Rightarrow y = y'.$$

Définition d'une fonction

Remarque

Une fonction f de E dans F n'est pas forcément définie sur E tout entier. Quand c'est le cas, on parlera d'application de E dans F .

En pratique, on définira souvent d'abord l'expression de f , puis dans second temps précisera son domaine de définition.

Définition d'une fonction

Exemple (Comment introduire une fonction)

1. Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x^2}, \end{aligned}$$

qui a pour *domaine de définition naturel* (*) : $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(*) c'est le plus grand sous ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel l'expression de f a un sens.

2. Dans un cas aussi simple, on écrira en général directement :

soit l'application $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x^2}$.

Le terme "application" signifie que l'espace de départ est le domaine de définition.

Définition d'une fonction

Exemple (Comment introduire une fonction)

3. Et si on veut définir f sur un sous domaine de $\mathbb{R}^*$:

soit l'application $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x^2}$.

4. Cas d'une fonction d'espace de départ $\mathbb{R}$ dont il n'est pas évident de fournir un domaine de définition. Introduction comme en 1., ou de manière formelle :

soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sin(x) + \frac{1}{2}}$,

et on propose un domaine D_f satisfaisant dans un second temps. On définit la fonction f sur $D_f =]-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}[$.

Exercice 9

Quel est le domaine de définition naturel de $f : x \mapsto \frac{1}{\sin(x) + \frac{1}{2}}$?

Définition d'une fonction

Question : que pensez-vous de la phrase suivante ?

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Remarque

Attention : il ne faut surtout pas confondre la fonction f et la valeur $f(x)$ prise par f en x !

Vocabulaire

Exemples illustrant le vocabulaire de base sur les fonctions

- ▶ Image :
- ▶ Antécédent :
- ▶ Graphe :

Composée

Definition (Composée de fonctions)

Soient E, F, G trois ensembles et les fonctions $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. On appelle composée de f et g la fonction $x \mapsto g(f(x))$ que l'on note $g \circ f$.

Remarque

Le domaine de définition de $g \circ f$ est $\{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$.

Composée

Exemple

Soient les applications $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 2x^4 + 1$ et $g : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x^2}$.
Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$ (incluant les domaines de déf. naturels).

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Definition

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction.

- ▶ f est surjective ssi tout élément de F admet au moins un antécédent.
- ▶ f est injective ssi tout élément de F admet au plus un antécédent.
- ▶ f est bijective ssi f est injective et surjective.

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Exercice 10

Représenter des applications de $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ qui sont injectives, surjectives, bijectives.