

# Licence 1ère année Mathématiques et Calcul 1

Quentin Denoyelle  
quentin.denoyelle@u-paris.fr

(avec la collaboration de A. Chambaz, L. Moisan et F. Benaych)

UFR de Mathématiques et Informatique  
Université Paris Cité, Campus Saint-Germain-des-Près

22 septembre 2025

# Introduction à MC1

# Organisation générale du cours

Toutes les semaines :

- ▶ Cours Magistraux (CM) : 1h30 les lundi (Amphi Binet) et 1h30 jeudi (Amphi Weiss).
- ▶ Travaux Dirigés (TD) : 2 x 2h30.

Volume horaire de 8h par semaine ! C'est votre enseignement le plus important du semestre.

# Ressources pédagogiques

L'ensemble des ressources seront sur Moodle

- ▶ polycopié du cours (mis en ligne progressivement par chapitre ET imprimé (progressivement...)),
- ▶ slides du CM,
- ▶ feuilles de TD,
- ▶ quelques DM reprenant des fondamentaux avec mise en place d'un Discord pour échanger vos réponses.

Vous trouverez également l'essentiel de ces ressources en accès libre sur ma page web :

<https://qdenoyelle.github.io/MC1>

# Méthodes de travail (conseils)

Vous êtes tous et toutes capable de réussir !

- ▶ Travail personnel nécessaire important et régulier !
- ▶ Travailler en groupes. Enseigner. Entraide.
- ▶ Plus vous vous imprégnez régulièrement de maths et des divers contenus du cours, plus cela sera efficace pour progresser.
- ▶ Revenir régulièrement sur les mêmes notions. Les mélanger.
- ▶ Etre actif dans votre apprentissage. Relire le cours c'est la toute première marche. Il faut surtout refaire par vous même (le cours, les TD). Chercher des nouveaux exemples. Vous tester, vous interroger avec et sans l'aide des supports.

# Méthodes de travail (conseils)

- ▶ Utiliser les CM comme une opportunité d'essayer de comprendre le maximum de choses possibles.
  - ▶ Donc se laisser du temps pour comprendre → **prise de notes**.  
Notez ce que vous trouvez important, comprenez (même si c'est flou et incomplet) et les questions que vous vous posez.
  - ▶ Laisser de la place sur votre cahier / vos feuilles pour compléter une fois rentré chez vous avec les documents du cours à votre disposition.
  - ▶ Mais avant cela : quelques heures après un CM, sans avoir relu vos notes, écrivez ce que vous avez compris et retenu du cours. Excellent exercice ! Même si vous avez l'impression de n'avoir rien compris, essayez quand même. Puis comparez et corrigez avec vos notes et documents à disposition.

# Méthodes de travail (conseils)

- ▶ En TD :
  - ▶ Être familier avec le contenu du cours en lien avec le TD afin que le TD soit le plus efficace pour votre apprentissage.
  - ▶ Mais si vous pensez ne rien savoir, ce n'est pas grave ! Cela sera forcément utile d'y aller quand même. C'est un début d'apprentissage, même si vous avez l'impression de ne pas comprendre.
  - ▶ N'ayez pas peur de vous tromper quand vous essayez de résoudre un exercice. C'est très efficace d'essayer et de se tromper pour apprendre. Personne ne va vous juger si votre réponse n'est pas complète, fausse etc... Vous êtes là pour apprendre et vos enseignant.es pour vous expliquer !
  - ▶ Ne pas hésiter à poser des questions. Vous pouvez être sûr que vous rendrez service à quelqu'un d'autre. Et cela rend le TD plus vivant.

# Évaluations

- ▶ 5 interros prévus en TD d'environ 15-20 minutes.
- ▶ Une évaluation commune en novembre (semaine du 10 nov.) : 1h30.
- ▶ Une évaluation finale début janvier : 2h.

# Évaluations

- ▶ 5 interros prévus en TD d'environ 15-20 minutes.
- ▶ Une évaluation commune en novembre (semaine du 10 nov.) : 1h30.
- ▶ Une évaluation finale début janvier : 2h.

Une formule pour les gouverner toutes ! Voir sur Moodle.

# Contenu du cours

On fera beaucoup de maths !

# Contenu du cours

On fera beaucoup de maths !

Une référence (livre) complémentaire au cours

- ▶ *Mathématiques. Tout-en-un pour la licence 1* chez Dunod.  
Très complet (trop ?). Très rigoureux. Peut-être pas si facile au premier abord.  
Il doit être disponible à la BU.

# Attente et exigence principale

Nous serons très attentif à la qualité de votre rédaction, à l'organisation et la cohérence de vos réponses !

# Oups...

Il y a aura à coup sûr des bugs informatiques en CM...

Des questions ?

Des questions ?

N'hésitez pas à me contacter (par mail etc...) ou à venir me voir à la fin d'un CM.

# Chapitre 0 : Notions Structurantes

- 1 Éléments de Logique
  - Quantificateurs et négation
  - Ordre des quantificateurs
  
- 2 Rudiments de Théorie des Ensembles
  - Généralités
  - Le cas particulier de  $\mathbb{R}$
  
- 3 Notions de Fonctions

# Section 1

## Éléments de Logique

---

# Introduction

Les énoncés mathématiques, ou *assertions*, *propriétés* ou encore *propositions*, sont formés à partir

- ▶ de variables  $x$ ,  $y$  etc...,
- ▶ de relations entre variables (appartenance, égalité etc...), que l'on appelle des prédicats,
- ▶ d'opérations logiques (et, ou, négation, implique, équivalence) qui permettent d'imbriquer les prédicats,

# Introduction

Les énoncés mathématiques, ou *assertions*, *propriétés* ou encore *propositions*, sont formés à partir

- ▶ de variables  $x$ ,  $y$  etc...,
- ▶ de relations entre variables (appartenance, égalité etc...), que l'on appelle des prédicats,
- ▶ d'opérations logiques (et, ou, négation, implique, équivalence) qui permettent d'imbriquer les prédicats,
- ▶ des quantificateurs (il existe, quelque soit).

# Définition

## Definition (Quantificateurs)

- ▶ L'expression "*pour tout*" ou "*quelque soit*" représentée par le symbole  $\forall$ .
- ▶ L'expression "*il existe*" représentée par le symbole  $\exists$ .

## Example

Soit pour  $x \in \mathbb{N}$ , le prédicat  $P(x) = "x \text{ est impair}"$ . Deux assertions utilisant  $\forall, \exists$  :

- ▶  $\forall x \in \mathbb{N}, P(x)$ ,
- ▶  $\exists x \in \mathbb{N}, P(x)$ .

## Exercice 1

Pour  $x \in \mathbb{N}$ , écrire le prédicat  $P(x)$  ("x est impair") grâce à des quantificateurs.

## Exercice 2

Pour  $x \in \mathbb{N}$ , écrire le prédicat  $P(x)$  ("x est impair") grâce à des quantificateurs.

### Remarque

Point rédaction sur l'usage des quantificateurs : ne pas mélanger les symboles et du texte !

# Négation d'assertion

Soient  $P$  et  $Q$  deux prédicats.

| Énoncé                  | Négation                             |
|-------------------------|--------------------------------------|
| non $P$                 | $P$                                  |
| $P$ ou $Q$              | non $P$ et non $Q$                   |
| $P$ et $Q$              | non $P$ ou non $Q$                   |
| $P \Rightarrow Q$       | $P$ et non $Q$                       |
| $\forall x \in X, P(x)$ | $\exists x \in X, \text{ non } P(x)$ |
| $\exists x \in X, P(x)$ | $\forall x \in X, \text{ non } P(x)$ |

# Négation d'assertion

Soient  $P$  et  $Q$  deux prédicats.

| Énoncé                  | Négation                             |
|-------------------------|--------------------------------------|
| non $P$                 | $P$                                  |
| $P$ ou $Q$              | non $P$ et non $Q$                   |
| $P$ et $Q$              | non $P$ ou non $Q$                   |
| $P \Rightarrow Q$       | $P$ et non $Q$                       |
| $\forall x \in X, P(x)$ | $\exists x \in X, \text{ non } P(x)$ |
| $\exists x \in X, P(x)$ | $\forall x \in X, \text{ non } P(x)$ |

Definition (Implication :  $\Rightarrow$ )

$P \Rightarrow Q$  s'écrit :

Contraposée de  $P \Rightarrow Q$  :

# Négation d'assertion

| Énoncé                  | Négation                             |
|-------------------------|--------------------------------------|
| non $P$                 | $P$                                  |
| $P$ ou $Q$              | non $P$ et non $Q$                   |
| $P$ et $Q$              | non $P$ ou non $Q$                   |
| $P \Rightarrow Q$       | $P$ et non $Q$                       |
| $\forall x \in X, P(x)$ | $\exists x \in X, \text{ non } P(x)$ |
| $\exists x \in X, P(x)$ | $\forall x \in X, \text{ non } P(x)$ |

## Exercice 3

Écrire la négation des deux assertions suivantes :

1.  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, 2^{-n} < \varepsilon.$
2. Soit  $I \subset \mathbb{R}$ . Assertion :  
 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x, y \in I \text{ et } x \leq z \leq y) \Rightarrow z \in I.$

# Attention à l'ordre des quantificateurs

Il faut retenir que pour maintenir le sens d'une assertion :

- ▶ on ne peut pas permuter des symboles  $\exists$  et  $\forall$  consécutifs,
- ▶ on peut permuter des  $\forall$  consécutifs,
- ▶ on peut permuter des  $\exists$  consécutifs.

# Attention à l'ordre des quantificateurs

Il faut retenir que pour maintenir le sens d'une assertion :

- ▶ on ne peut pas permuter des symboles  $\exists$  et  $\forall$  consécutifs,
- ▶ on peut permuter des  $\forall$  consécutifs,
- ▶ on peut permuter des  $\exists$  consécutifs.

## Exemple

- ▶  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, 2^{-n} < \varepsilon$ , est une assertion VRAI.
- ▶ Par contre :  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \forall n \geq N, 2^{-n} < \varepsilon$ , est FAUSSE.

## Section 2

# Rudiments de Théorie des Ensembles

# Définitions de base

## Definition (Union, intersection...)

Soient  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ . On définit :

►  $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\},$

# Définitions de base

## Definition (Union, intersection...)

Soient  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ . On définit :

- ▶  $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\},$
- ▶  $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\},$

# Définitions de base

## Definition (Union, intersection...)

Soient  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ . On définit :

- ▶  $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\},$
- ▶  $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\},$
- ▶  $\complement_E A = \{x \in E / x \notin A\}$  souvent noté  $A^c,$

# Définitions de base

## Definition (Union, intersection...)

Soient  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ . On définit :

- ▶  $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\},$
- ▶  $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\},$
- ▶  $\complement_E A = \{x \in E / x \notin A\}$  souvent noté  $A^c,$
- ▶  $B \setminus A = B \cap A^c.$

# Définitions de base

## Definition (Union, intersection...)

Soient  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ . On définit :

- ▶  $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$ ,
- ▶  $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$ ,
- ▶  $\complement_E A = \{x \in E / x \notin A\}$  souvent noté  $A^c$ ,
- ▶  $B \setminus A = B \cap A^c$ .

Puis les relations :

- ▶  $A \subset B$  si et seulement si  $\forall a \in A, a \in B$ ,

# Définitions de base

## Definition (Union, intersection...)

Soient  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ . On définit :

- ▶  $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$ ,
- ▶  $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$ ,
- ▶  $\complement_E A = \{x \in E / x \notin A\}$  souvent noté  $A^c$ ,
- ▶  $B \setminus A = B \cap A^c$ .

Puis les relations :

- ▶  $A \subset B$  si et seulement si  $\forall a \in A, a \in B$ ,
- ▶  $A = B$  si et seulement si  $(A \subset B \text{ et } B \subset A)$ ,
- ▶  $A = \emptyset$  si et seulement si  $\forall x \in E, x \notin A$ ,

# Définitions de base

## Exercice 4

Soient  $A, B$  deux sous ensembles de  $E$ . Montrer que  $A \subset B$  si et seulement si  $B^c \subset A^c$ .

## Exercice 5

Soient  $A, B$  deux sous ensembles de  $E$ . Représenter schématiquement l'ensemble  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

## Definition (Produit cartésien)

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. Le produit cartésien de  $E$  et  $F$ , noté  $E \times F$  est l'ensemble

$$E \times F = \{(x, y) / x \in E, y \in F\}.$$

## Exemple

- ▶  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  noté  $\mathbb{R}^2$ ,
- ▶  $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ ,
- ▶  $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- ▶ ...

# Exercice sur le produit cartésien

## Exercice 6

Représenter les ensembles  $[0, 1] \times [-1, 2]$ ,  $\{-1\} \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{N} \times \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 1\}$ ,  $\{1\} \times \mathbb{Q}$ .

# Exercice sur le produit cartésien

On admet l'existence de l'ensemble des nombres réels et celles des opérations d'addition et de multiplication. On admet que  $\mathbb{R}$  est muni d'une relation d'ordre  $\leq$  totale.

On admet l'existence de l'ensemble des nombres réels et celles des opérations d'addition et de multiplication. On admet que  $\mathbb{R}$  est muni d'une relation d'ordre  $\leq$  totale.

### Definition (Partie entière)

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on admet l'existence d'un unique entier relatif, noté  $E(x)$ , caractérisé par :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

On appelle  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  la fonction partie entière.

# Notion d'intervalle

## Definition (Intervalle)

Un sous ensemble  $I$  de  $\mathbb{R}$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  si et seulement si

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x, y \in I \text{ et } x \leq z \leq y) \Rightarrow z \in I.$$

Ce qui s'écrit encore

$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I.$$

## Exercice 7

Écrire la négation de ces assertions.

# Notion d'intervalle

## Exemple

$[0, 1]$ ,  $] - 1, 2]$ ,  $[-\pi, \frac{2}{3}[$ ,  $]0, 1[$ ,  $]2, +\infty[$ ,  $] - \infty, -1]$ ,  $\mathbb{R}$  sont des intervalles.

$\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $[0, 1] \cup [2, 3]$  ne sont pas des intervalles.

# Majorant, minorant et conséquences

## Definition

Soient  $A \subset \mathbb{R}$  et  $m, M \in \mathbb{R}$ .

1.  $M$  est un majorant de  $A$  si pour tout  $a \in A$ ,  $a \leq M$ .
2.  $m$  est un minorant de  $A$  si pour tout  $a \in A$ ,  $m \leq a$ .

# Majorant, minorant et conséquences

## Definition

Soient  $A \subset \mathbb{R}$  et  $m, M \in \mathbb{R}$ .

1.  $M$  est un majorant de  $A$  si pour tout  $a \in A$ ,  $a \leq M$ .
2.  $m$  est un minorant de  $A$  si pour tout  $a \in A$ ,  $m \leq a$ .
3.  $A$  est majoré (respectivement minoré) si  $A$  admet un majorant (resp. minorant), ce qui s'écrit

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leq M,$$

(resp. :  $\exists m \in \mathbb{R}, \forall a \in A, m \leq a$ ).

# Majorant, minorant et conséquences

## Exercice 8

Montrer que  $\mathbb{N}$  est minoré par 0, mais n'est pas majoré.

1.  $M$  est un majorant de  $A$  si pour tout  $a \in A$ ,  $a \leq M$ .
2.  $m$  est un minorant de  $A$  si pour tout  $a \in A$ ,  $m \leq a$ .

# Majorant, minorant et conséquences

## Exercice 9

Montrer que  $\mathbb{Z}$  n'est ni minoré, ni majoré.

# Valeur absolue

## Definition (Valeur absolue)

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on appelle valeur absolue de  $x$  la quantité

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

En particulier  $|x| \geq 0$  et  $|x| = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .

# Valeur absolue

## Definition (Valeur absolue)

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on appelle valeur absolue de  $x$  la quantité

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

En particulier  $|x| \geq 0$  et  $|x| = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .

## Proposition (Inégalité triangulaire)

Soient  $x, y, M \in \mathbb{R}$ . Alors

1. *Inégalité triangulaire* :  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .
2. *Inégalité triangulaire inverse* :  $||x| - |y|| \leq |x + y|$ .

# Majorant, minorant et conséquences

## Definition (Ensemble borné)

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ . On dira que  $A$  est borné s'il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $a \in A$ ,  $a \leq M$ .

## Example

$[-3, 1]$  est borné car pour tout  $x \in [-3, 1]$ , on a  $|x| \leq 3$ .

# Majorant, minorant et conséquences

## Definition (Ensemble borné)

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ . On dira que  $A$  est borné s'il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $a \in A$ ,  $a \leq M$ .

## Example

$[-3, 1]$  est borné car pour tout  $x \in [-3, 1]$ , on a  $|x| \leq 3$ .

## Definition (Maximum, minimum)

Soient  $A \subset \mathbb{R}$  et  $M \in \mathbb{R}$ .

$M$  est le maximum de  $A$  (ou plus grand élément de  $A$ ) et on note  $M = \max(A)$  si

- ▶  $M$  est un majorant de  $A$ ,
- ▶  $M \in A$ .

Pour le *minimum* : remplacer "majorant" par "minorant".

## Section 3

# Notions de Fonctions

# Définition d'une fonction

Soient  $E, F$  deux ensembles.

## Definition (Fonction)

Une fonction  $f$  de  $E$  dans  $F$ , noté  $f : E \rightarrow F$ , est un objet caractérisé par la donnée de :

- ▶ un espace de départ, ici  $E$ ,
- ▶ un espace d'arrivée, ici  $F$ ,
- ▶ un sous ensemble  $\mathcal{G}_f$  de  $E \times F$ , appelé *graphe* de  $f$ , tel que

$$\forall x \in E, \forall (y, y') \in F^2, ((x, y) \in \mathcal{G}_f \text{ et } (x, y') \in \mathcal{G}_f) \Rightarrow y = y'.$$

Pour  $(x, y) \in \mathcal{G}_f$ , on écrira en pratique que  $y = f(x)$ ,  $y$  est l'image de  $x$  par  $f$ .

Le domaine de définition de  $f$  est  $D_f = \{x \in E / \exists y \in F, y = f(x)\}$ .

# Définition d'une fonction

Interprétation de la condition :

$$\forall (x, y, y') \in F, ((x, y) \in \mathcal{G}_f \text{ et } (x, y') \in \mathcal{G}_f) \Rightarrow y = y'.$$

# Définition d'une fonction

## Remarque

Une fonction  $f$  de  $E$  dans  $F$  n'est pas forcément définie sur  $E$  tout entier. Quand c'est le cas, on parlera d'application de  $E$  dans  $F$ .

# Définition d'une fonction

## Remarque

Une fonction  $f$  de  $E$  dans  $F$  n'est pas forcément définie sur  $E$  tout entier. Quand c'est le cas, on parlera d'application de  $E$  dans  $F$ .

**En pratique, on définira souvent d'abord l'expression de  $f$ , puis dans second temps précisera son domaine de définition.**

# Définition d'une fonction

## Exemple (Comment introduire une fonction)

### 1. Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x^2}, \end{aligned}$$

qui a pour *domaine de définition naturel* (\*) :  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

(\*) c'est le plus grand sous ensemble de  $\mathbb{R}$  sur lequel l'expression de  $f$  a un sens.

# Définition d'une fonction

## Exemple (Comment introduire une fonction)

### 1. Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x^2}, \end{aligned}$$

qui a pour *domaine de définition naturel* (\*) :  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

(\*) c'est le plus grand sous ensemble de  $\mathbb{R}$  sur lequel l'expression de  $f$  a un sens.

### 2. Dans un cas aussi simple, on écrira en général directement :

soit l'application  $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x^2}$ .

Le terme "application" signifie que l'espace de départ est le domaine de définition.

# Définition d'une fonction

## Exemple (Comment introduire une fonction)

3. Et si on veut définir  $f$  sur un sous domaine de  $\mathbb{R}^*$  :  
soit l'application  $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x^2}$ .

# Définition d'une fonction

## Exemple (Comment introduire une fonction)

3. Et si on veut définir  $f$  sur un sous domaine de  $\mathbb{R}^*$  :

soit l'application  $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x^2}$ .

4. Cas d'une fonction d'espace de départ  $\mathbb{R}$  dont il n'est pas évident de fournir un domaine de définition. Introduction comme en 1., ou de manière formelle :

soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{\sin(x) + \frac{1}{2}}$ ,

et on propose un domaine  $D_f$  satisfaisant dans un second temps. On définit la fonction  $f$  sur  $D_f = ]-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}[$ .

# Définition d'une fonction

## Exemple (Comment introduire une fonction)

3. Et si on veut définir  $f$  sur un sous domaine de  $\mathbb{R}^*$  :

soit l'application  $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x^2}$ .

4. Cas d'une fonction d'espace de départ  $\mathbb{R}$  dont il n'est pas évident de fournir un domaine de définition. Introduction comme en 1., ou de manière formelle :

soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{\sin(x) + \frac{1}{2}}$ ,

et on propose un domaine  $D_f$  satisfaisant dans un second temps. On définit la fonction  $f$  sur  $D_f = ]-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}[$ .

## Exercice 12

Quel est le domaine de définition naturel de  $f : x \mapsto \frac{1}{\sin(x) + \frac{1}{2}}$  ?

# Définition d'une fonction

Question : que pensez-vous de la phrase suivante ?

La fonction  $f(x) = \frac{1}{x}$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$ .

# Définition d'une fonction

Question : que pensez-vous de la phrase suivante ?

La fonction  $f(x) = \frac{1}{x}$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$ .

## Remarque

**Attention** : il ne faut surtout pas confondre la fonction  $f$  et la valeur  $f(x)$  prise par  $f$  en  $x$  !

# Vocabulaire

## Exemples illustrant le vocabulaire de base sur les fonctions

- ▶ Image :
- ▶ Antécédent :
- ▶ Graphe :

# Composée

## Definition (Composée de fonctions)

Soient  $E, F, G$  trois ensembles et les fonctions  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$ . On appelle composée de  $f$  et  $g$  la fonction  $x \mapsto g(f(x))$  que l'on note  $g \circ f$ .

## Remarque

Le domaine de définition de  $g \circ f$  est  $\{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$ .

# Composée

## Exemple

Soient les applications  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 2x^4 + 1$  et  $g : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x^2}$ .  
Déterminer  $g \circ f$  et  $f \circ g$  (incluant les domaines de déf. naturels).

# Injectivité, surjectivité, bijectivité

## Definition

Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction.

- ▶  $f$  est surjective ssi tout élément de  $F$  admet au moins un antécédent.
- ▶  $f$  est injective ssi tout élément de  $F$  admet au plus un antécédent.
- ▶  $f$  est bijective ssi  $f$  est injective et surjective.

# Injectivité, surjectivité, bijectivité

## Exercice 13

Représenter des applications de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $[0, 1]$  qui sont injectives, surjectives, bijectives.