Polycopié de Cours
Mathématiques et Calcul 1
Licence 1ère année

Quentin Denoyelle - quentin.denoyelle@u-paris.fr

2025/2026 - 1er Semestre

Ce polycopié est le fruit d'un travail collectif. Il repose sur le travail des précédents responsables de MC1, à savoir du plus récent au plus ancien : Antoine Chambaz, Lionel Moisan, Florent Benaych. Merci à eux ! Un grand merci également à Irène Kaltenmark pour les nombreuses discussions, ses idées d'exercices et multiples contenus.

Table des matières

Chapitre 0

Concepts Structurants

0.1 Éléments de Logique

Les mathématiques forment un langage ayant ses propres règles et codes. Apprendre les mathématiques c'est apprendre des nouveaux concepts (de géométrie, d'analyse, d'algèbre), mais c'est aussi apprendre sa grammaire afin de pouvoir exprimer des raisonnements cohérents qui pourront être compris facilement par d'autres êtres humains. Ce second défi est souvent très sous estimé, pourtant l'intérêt des mathématiques (et de toutes sciences) réside essentiellement dans le fait de pouvoir être communiquées.

Votre tâche cette année sera donc avant tout d'apprendre à rédiger correctement des mathématiques, ce qui est en réalité beaucoup plus difficile que d'apprendre l'énoncé d'un nouveau théorème ! En tant qu'enseignant.es nous ne sommes que très peu intéressé.es de savoir si vous pensez qu'une question que nous vous posons est vraie ou fausse. Ce qui nous intéresse, ce que l'on va apprécier, c'est la cohérence de votre raisonnement et la facilité de suivre le chemin que vous avez tracé jusqu'à la réponse. Commençons donc par donner quelques éléments de base sur la grammaire mathématiques.

Les énoncés mathématiques, que l'on peut aussi appelés *assertions*, *propriétés* ou encore *propositions*, sont formés à partir des ingrédients suivants

- des variables x, y etc...,
- des relations entre les variables (appartenance, égalité etc...), que l'on appelle des prédicats,
- des opérations logiques (et, ou, négation, implique, équivalence) qui permettent d'imbriquer les prédicats pour en former de nouveaux plus complexes,
- des quantificateurs (il existe, quelque soit).

Remarque 0.1: L'étude du langage mathématiques représente en lui-même un domaine des mathématiques sur lequel des chercheurs et chercheuses travaillent. C'est ce que l'on appelle la *Logique*. Les concepts et définitions présentées ici ne sont qu'une très brève et imparfaite ouverture à ce domaine. Cependant cela devrait suffire à vous donner les briques fondamentales sur lesquelles construire vos connaissances futures.

0.1.1 Quantificateurs et négation d'une assertion

Définition 0.2 (Quantificateurs): *L'expression* "pour tout" *ou* "quelque soit" *est représentée à travers le symbole* $\forall$.

L'expression "il existe" *est représentée par le symbole* $\exists$.

Exemple 0.3: Illustrons l'utilisation des quantificateurs pour l'écriture d'assertions mathématiques. Considérons le prédicat P portant sur les entiers naturels $\mathbb{N}$: pour $x \in \mathbb{N}$, $P(x)$ correspond à "x est pair" (le prédicat P dépend ici d'une variable). Voici deux assertions utilisant P formées à partir des quantificateurs $\forall$ et $\exists$

— $\forall x \in \mathbb{N}, P(x)$,

— $\exists x \in \mathbb{N}, P(x)$.

Notez que la première assertion est fausse. Tous les entiers naturels ne sont pas pairs, c'est le cas par exemple de 1 (il suffit de fournir un contre-exemple pour invalider l'assertion commençant par $\forall$). La deuxième assertion est par contre vraie, puisque 2 est pair : il existe bien un entier naturel qui est pair.

On peut si on le souhaite réécrire le prédicat P grâce à des quantificateurs. Pour $x \in \mathbb{N}$, $P(x)$ s'écrit : $\exists k \in \mathbb{N},\ x = 2k$.

Remarque 0.4: L'utilisation de ces symboles est assez récente dans l'histoire des mathématiques (une centaine d'année)[1]. Le $\forall$ représente un A renversé pour "Alle" ("Tout" en allemand). Le $\exists$ est un E renversé.

Remarque 0.5 (Point rédaction): La bonne pratique d'utilisation des symboles $\forall$ et $\exists$ est réservée aux phrases mathématiques purement symboliques. Par exemple on écrit soit littéralement

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{N}, \text{ il existe } y \in \mathbb{N} \text{ tel que } x < y,$$

ou soit de manière équivalente symboliquement

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, x < y,$$

mais pas un mélange des deux

$$\forall x \in \mathbb{N}, \text{ il existe } y \in \mathbb{N}, x < y.$$

Négation d'assertions. La démonstration d'une contraposée et le raisonnement par l'absurde demande de savoir exprimer la négation d'une assertion. L'écriture symbolique des assertions est très pratique pour écrire sans se tromper ces négations, pourvu que l'on connaît et comprend les règles énoncées dans le tableau ci dessous. P et Q représentent des prédicats.

1. Voir le lien suivant pour une brève histoire des quantificateurs `https://fr.wikipedia.org/wiki/Quantification_(logique)`.

Énoncé	Négation
non P	P
P ou Q	non P et non Q
P et Q	non P ou non Q
$P \Rightarrow Q$	P et non Q
$\forall x \in X, P(x)$	$\exists x \in X,$ non $P(x)$
$\exists x \in X, P(x)$	$\forall x \in X,$ non $P(x)$

La négation de P se note aussi $\neg P$.

Exemple 0.6: L'expression littérale "il existe deux entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2}$ soit égal à leur quotient" s'écrit en langage formel

$$\exists p \in \mathbb{N}^*, \exists q \in \mathbb{N}^*, \sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad \text{(ou concisément } \sqrt{2} \in \mathbb{Q})$$

et sa négation

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}^*, \sqrt{2} \neq \frac{p}{q} \qquad \text{(ou concisément } \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}).$$

La première assertion est fausse et sa négation est donc vraie.

Remarque 0.7 (Confusion entre contraposée et négation): Une erreur très (très) commune, qu'il faut donc éviter, est de confondre

— la **contraposée** de "$P \Rightarrow Q$" qui est "non $Q \Rightarrow$ non P",

— la **négation** de "$P \Rightarrow Q$" qui est "P et (non Q)".

Une assertion et sa contraposée ont la même valeur de vérité ("$P \Rightarrow Q$" est vraie si et seulement si "non $Q \Rightarrow$ non P" est vraie). Par exemple l'implication "si n est un entier multiple de 4, alors n est pair" est une implication vraie. Sa contraposée est par définition "si n n'est pas pair, alors n n'est pas multiple de 4". Cette dernière assertion est bien de nouveau vraie !

Par contre une assertion et sa négation ont des valeurs de vérité opposées ("$P \Rightarrow Q$" est vraie si et seulement si "P et (non Q)" est fausse).

Remarque 0.8: Le fait que l'implication "$P \Rightarrow Q$" soit vraie n'est pas équivalent à ce que P soit vraie. Considérons l'exemple suivant :
Soit $x \in \mathbb{R}$. L'assertion

$$x > 1 \Rightarrow x > 0$$

est vraie. Cela ne dit pas pour autant que $x > 1$.

0.1.2 Ordre des quantificateurs

Le langage logique lève des ambiguïtés éventuelles du langage courant, notamment concernant les relations de dépendance entre différentes variables intervenant dans une assertion. En effet, considérons par exemple les deux phrases suivantes

Tous les enfants aiment quelqu'un,

et

Tout nombre est inférieur à un certain nombre.

Il n'est pas clair si "quelqu'un" (dans la première assertion) et "un certain nombre" (dans la seconde) sont indépendants respectivement de l'enfant et du nombre considéré. Est-ce que "un certain nombre" est un nombre qui a été fixé, par exemple 3 ? Dans ce cas l'assertion est fausse puisque 4 n'est pas inférieur à 3. Ou alors est-ce que l'assertion sous entend que le "certain nombre" peut-être adapté en fonction du nombre initial choisi ? Dans ce cas, elle est vraie.

Dans le langage logique, l'assertion

$$\forall x, \exists y, x \text{ aime } y$$

indique que y dépend de x (par exemple, y est un parent de x) et l'assertion

$$\exists y, \forall x, x \text{ aime } y$$

exprime que y ne dépend pas de x (par exemple, y est le Père Noël). L'ordre des quantificateurs dans une assertion est donc fondamental. Échanger des $\exists$ et $\forall$ consécutifs changent a priori radicalement le sens de l'assertion. Illustrons-le sur un exemple concret.

Exemple 0.9: L'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$$

est vraie. Montrons-le. Méthode : pour démontrer une assertion de la forme

$$\forall x \in E, P(x)$$

où E est un ensemble et P est une propriété qui dépend de x, on considère un x quelconque dans E et on montre $P(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$.
Pour montrer l'existence d'un objet mathématique, on le construit explicitement ou on utilise un théorème qui garantit son existence. Posons $y = x + 1$, alors y est bien défini dans $\mathbb{R}$ et on a bien $x < y$.

En revanche, l'assertion suivante (où l'ordre d'introduction des variables a été inversé)

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x < y \tag{0.1.1}$$

est fausse car sa négation

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x \geqslant y$$

est vraie. En effet, soit $y \in \mathbb{R}$, en posant $x = y$, on a bien $x \geqslant y$.

Si on ne pense pas à passer par la négation pour simplifier la démonstration, on peut aussi bien raisonner par l'absurde. Supposons l'assertion (0.1.1) vraie, donc il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x < y$. Or en posant $x = y$ (ou $x = y + 1$), on obtient une contradiction puisque $x \in \mathbb{R}$ et pourtant $x < y$ est faux.

Remarque 0.10: Il est toujours possible d'inverser deux ∀ (ou deux ∃) consécutifs entre eux. Par exemples les énoncés suivants sont équivalents

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, \; P(x, y),$$
$$\forall y \in Y, \forall x \in X, \; P(x, y).$$

En particulier, il arrive souvent que l'on rassemble des ∀ ou ∃ consécutifs.

0.1.3 Quelques méthodes de démonstration

Démonstration d'un énoncé de type "Pour tout x, $P(x)$".

a) Montrons que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \; x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}, x < z < y.$$

Démonstration. On doit montrer pour tout x et y une propriété qui dépend de x et y. On commence par introduire x et y. La propriété étant une implication, on peut raisonner par déduction et donc supposer la prémisse vraie. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et supposons que $x < y$.
On doit maintenant construire un z vérifiant $x < z < y$. On peut raisonner graphiquement, se donner un ou deux exemples concrets ($x = 0, y = 1$) pour faire une proposition et voir si celle-ci se généralise. La moyenne de x et y est toujours définie et satisfait l'encadrement dès que $x < y$. Posons $z = \frac{x+y}{2}$, alors $z \in \mathbb{R}$ et $x < z < y$. Il existe donc bien toujours un réel strictement compris entre x et y. □

b) Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; \exists a, b \in \mathbb{R}, \; a < b \text{ et } \forall x \in]a, b[, \mathrm{E}(x) = n.$$

Démonstration. Une assertion de la forme "Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$" appelle souvent à une démonstration par récurrence. Cependant, la propriété au rang n, $P(n)$, n'apporte parfois aucune information sur $P(n+1)$ et il faut raisonner autrement. Parfois, la démonstration directe est juste plus simple que la démonstration par récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On doit construire un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$, qui peut dépendre de n, dont tous les éléments ont une partie entière égale à n. Posons $a = n$ et $b = n + 1$, alors on a bien pour tout $x \in]a, b[$, $\mathrm{E}(x) = n$. □

Démonstrations d'inclusion et d'égalité entre ensembles.

a) Soit $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1\right]$. Montrons que

$$]0, 1] \subset I.$$

Démonstration. Il est essentiel de bien connaître la définition en écriture formelle d'une inclusion pour savoir comment appréhender la rédaction de la preuve. A est inclus dans B si et seulement si

$$\forall a \in A, a \in B.$$

Démontrer une inclusion se ramène donc le plus souvent à démontrer un énoncé de type "Pour tout x, $P(x)$".

Soit $x \in]0,1]$. Montrons que $x \in I$. Par définition, $x \in I$ si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$. Raisonnons graphiquement en nous donnant un x sur l'intervalle $]0,1]$ et en représentant sur ce même intervalle la suite $(\frac{1}{n})_n$. Puisque cette suite tend vers 0 et que $x > 0$, à partir d'un certain rang, les termes de cette suite sont plus petits que x. Puisque nous n'avons pas encore revu la notion de limite, explicitons un terme plus petit que x.

Puisque $x > 0$

$$\frac{1}{n} \leqslant x \iff \frac{1}{x} \leqslant n.$$

Par définition de la partie entière, $E(\frac{1}{x}) \leqslant \frac{1}{x} < E(\frac{1}{x}) + 1$. Ainsi pour $N = E(\frac{1}{x}) + 1$, on a $N \in \mathbb{N}^*$ (car $x > 0$) et $\frac{1}{N} \leqslant x$. De plus, $x \leqslant 1$ car $x \in]0,1]$ donc $x \in \left[\frac{1}{N}, 1\right]$ donc $x \in I$. Finalement, $]0,1] \subset I$.

□

b) Montrons que $I =]0,1]$.

Démonstration. Par définition, deux ensembles A et B sont égaux si

$$A \subset B \quad \text{et} \quad A \supset B.$$

Raisonnons par double inclusion.

($\supset$) D'après la démonstration précédente, on a bien $]0,1] \subset I$.

($\subset$) Soit $x \in I$. Par définition de I, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$. Or $\left[\frac{1}{n}, 1\right] \subset]0,1]$ donc $x \in]0,1$. Ainsi, $I \subset]0,1]$.

Ceci démontre que $I =]0,1]$. □

0.2 Rudiments de Théories des Ensembles

0.2.1 Quelques définitions générales

Les mathématiques modernes sont construites à partir de la théorie des ensembles dont l'objectif est de définir rigoureusement la notion d'ensemble et différents objets qui en dérivent. Ces définitions sont basées sur des axiomes, c'est-à-dire des principes admis, qui permettent ensuite d'avoir des outils suffisamment riches pour produire des résultats intéressants.

L'objet de cette section n'est pas de plonger dans les rouages de la théorie des ensembles, d'aller voir vraiment comment cela fonctionne, mais plutôt de fournir une série de définitions (qui reposent donc sur les axiomes mentionnés au-dessus) que vous utiliserez dans la suite de vos études en permanence.

Définition 0.11: *Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. On définit les sous-ensembles de E suivants*

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in E \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}, \\ A \cap B &= \{x \in E \,/\, x \in A \text{ et } x \in B\}, \\ \complement_E A &= \{x \in E \,/\, x \notin A\}, \\ B \setminus A &= B \cap A^c, \end{aligned}$$

qui représentent respectivement l'union de A et B, l'intersection de A et B, le complémentaire de A dans E et enfin B privé de A. Le complémentaire de A est parfois noté $A^{\complement}$ quand il n'y a pas d'ambiguïté sur le fait qu'il est considéré par rapport à E.

Nous avons également les relations suivantes entre ensembles

$$\begin{array}{lll} A \subset B & \text{si et seulement si} & \forall a \in A, a \in B \\ A = B & \text{si et seulement si} & (A \subset B \text{ et } B \subset A) \\ A = \emptyset & \text{si et seulement si} & \forall x \in E, x \notin A. \end{array}$$

Remarque 0.12: En particulier, A est non vide si et seulement si

$$\exists x \in E,\ x \in A.$$

Pour montrer qu'un ensemble est non vide, il faut donc construire (explicitement ou implicitement) un élément de cet ensemble.

Exemple 0.13: Soient $A \subset \mathbb{R}$ non vide et $B = \{a + 1 \,/\, a \in A\}$. Alors B est non vide. En effet, puisque $A \neq \emptyset$, il existe $a \in A$. Et donc par définition de B, on a $a + 1 \in B$. Ainsi B est bien non vide.

Définition 0.14: *Soient E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E indexée par un ensemble I. On définit les sous-ensembles suivants*

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} A_i &= \{x \in E \,/\, \exists i \in I, x \in A_i\}, \\ \bigcap_{i \in I} A_i &= \{x \in E \,/\, \forall i \in I, x \in A_i\}. \end{aligned}$$

Dans la définition précédente, I est quelconque, fini ou infini. Par exemple, $I = [0, 1]$, $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $I = \mathbb{N}$... Dans les deux derniers cas, on pourra noter l'union : $\bigcup_{i=1}^{5} A_i$, respectivement $\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i$.

Exemple 0.15: Montrer que $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n, n+1[$ et $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right]$ sont non vides.

Démonstration. Puisque $\frac{1}{2} \in]0,1[$ et $]0,1[\subset A$ (donné pour $n = 0$), $\frac{1}{2} \in A$. Ainsi, A est non vide. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ donc $0 \in B$. Ainsi, B est non vide. □

Définition 0.16 (Produit cartésien): *Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et F, noté E × F est l'ensemble*

$$E \times F = \{(x,y) / x \in E,\ y \in F\}.$$

C'est donc l'ensemble des couples dont le premier coefficient est un élément de E et le deuxième coefficient un élément de F. On peut itérer ce procédé est définir le produit cartésienne de plusieurs ensembles. Les éléments sont alors appelés des triplets, n-uplets pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$...

Exemple 0.17: L'ensemble $\mathbb{R}^2$ représente le plan, c'est l'ensemble des couples dont les coefficients sont réels et il est particulièrement adapté pour étudier les questions de géométrie planaire, tracer des courbes représentatives de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ etc... Plus généralement $\mathbb{R}^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des n-uplets à coefficients réels est un ensemble central en algèbre linéaire (voir MC2 au second semestre).

Remarque 0.18 (Assertions utilisant l'ensemble vide): L'ensemble vide est l'ensemble ne contenant aucun élément. Soit P une propriété dépendant d'une variable $x \in E$ pour un ensemble E quelconque. L'assertion suivante est toujours vraie :

$$\forall x \in \varnothing, P(x). \tag{0.2.1}$$

L'assertion suivante est toujours fausse :

$$\exists x \in \varnothing, P(x). \tag{0.2.2}$$

En effet, l'assertion "$\exists x \in \varnothing$" est fausse par définition de l'ensemble vide donc l'assertion (0.2.2) est fausse. De plus, la négation de l'assertion (0.2.1) est

$$\exists x \in \varnothing, \neg P(x)$$

qui est donc également fausse par le même argument. Ainsi, (0.2.1) est vraie.

0.2.2 Le cas particulier de l'ensemble $\mathbb{R}$

L'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, joue un rôle central en mathématiques puisqu'il est à la base de très nombreux problèmes (géométrie, analyse, algèbre linéaire...). Les utilisations implicites et admises de cet ensemble sont récurrentes dans l'histoire des mathématiques. Cependant sa construction rigoureuse ne date que de la seconde moitié du 19ème siècle. C'est une question que nous pourrions résoudre ensemble car sa résolution utilise des outils et concepts qui vous sont abordables[2]. Nous admettons cependant son existence, ainsi que quelques propriétés le concernant.

2. Pour en savoir plus sur la construction des nombres réels, vous pouvez par curiosité jeter un oeil au lien suivant `https://fr.wikipedia.org/wiki/Construction_des_nombres_rÃl’els`.

On admet donc l'existence de l'ensemble des nombres réels et celles des opérations d'addition et de multiplication. On admet que $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ qui vérifie donc

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x$, (réflexivité),
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leqslant y$ et $y \leqslant x \Rightarrow x = y$, (antisymétrie),
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leqslant y$ et $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$, (transitivité).

Cette relation d'ordre est totale :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x,$$

dit autrement, il est toujours possible de comparer deux nombres réels entre eux à travers la relation $\leqslant$.

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on note $x < y$ si et seulement si "$x \leqslant y$ et $x \neq y$".

Définition 0.19 (Partie entière): *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on admet l'existence d'un unique entier relatif, noté $\mathrm{E}(x)$, caractérisé par :*

$$\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x) + 1.$$

On appelle $\mathrm{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ la fonction partie entière.

Définition 0.20 (Intervalle): *Un sous ensemble I de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \in I$, $y \in I$ et $x \leqslant z \leqslant y$ alors $z \in I$. Soit encore, I est un intervalle si*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x, y \in I \text{ et } x \leqslant z \leqslant y) \Rightarrow z \in I.$$

Ce qui s'écrit encore

$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R},\ x \leqslant z \leqslant y \Rightarrow z \in I.$$

Exemple 0.21: $[0, 1]$, $]-1, 2]$, $[-\pi, \frac{2}{3}[$, $]0, 1[$, $]2, +\infty[$, $]-\infty, -1]$, $\mathbb{R}$ sont des intervalles.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $[0, 1] \cup [2, 3]$ ne sont pas des intervalles.

Grâce à la relation d'ordre $\leqslant$, on peut définir les notions de majorant, minorant et celles qui en découlent. Elles nous seront utiles tout au long du semestre.

Définition 0.22: *Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $m, M \in \mathbb{R}$.*

1. *M est un majorant de A si pour tout $a \in A$, $a \leqslant M$.*
2. *m est un minorant de A si pour tout $a \in A$, $m \leqslant a$.*
3. *A est majoré (respectivement minoré) si A admet un majorant (resp. minorant), ce qui s'écrit*

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ a \leqslant M,$$

(resp. : $\exists m \in \mathbb{R}$, $\forall a \in A$, $m \leqslant a$).

Exemple 0.23: 1. $[0,1]$ admet 2 comme majorant (en fait tout réel supérieur ou égal à 1) et $-\frac{1}{3}$ comme minorant (en fait tout réel inférieur ou égale à 0. Ainsi c'est un ensemble minoré et majoré.

2. $\mathbb{N}$ est minoré par 0, par contre $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

Définition 0.24 (Valeur absolue): *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle valeur absolue de x la quantité*

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geqslant 0, \\ -x & si\ x \leqslant 0. \end{cases}$$

En particulier $|x| \geqslant 0$ et $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

La valeur absolue est un objet important et une de ses propriétés fondamentales est l'inégalité triangulaire.

Proposition 0.25 (Inégalité triangulaire): *Soient $x, y, M \in \mathbb{R}$. Alors*

1. Inégalité triangulaire : $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

2. Inégalité triangulaire inverse : $||x| - |y|| \leqslant |x+y|$.

Démonstration. Voir TD. □

On peut définir la notion de sous ensemble de $\mathbb{R}$ borné en imposant que c'est un ensemble minoré et majoré. Cependant la valeur absolue permet d'en écrire une définition équivalente plus pratique.

Définition 0.26 (Ensemble borné): *Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dira que A est borné s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $a \in A$, $|a| \leqslant M$.*

Exemple 0.27: $[-3,1]$ est borné car pour tout $x \in [-3,1]$, on a $|x| \leqslant 3$.

Définition 0.28 (Maximim, minimum): *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $m, M \in \mathbb{R}$.*

1. M est le maximum de A (ou plus grand élément de A) et on note $M = \max(A)$ si

- *M est un majorant de A,*
- *$M \in A$.*

2. m est le minimum de A (ou plus petit élément de A) et on note $m = \min A$ si

- *m est un minorant de A,*
- *$m \in A$.*

Exemple 0.29: 1. $A =]-\infty, 5]$ est majoré par 5 et par tout réel plus grand que 5 mais n'admet pas de minorant. A admet 5 comme maximum et n'a pas de minimum.

Démonstration. Montrons que 5 est le maximum de A. On a par définition : pour tout $a \in A$, $a \leqslant 5$ donc 5 est un majorant de A. De plus $5 \in A$. D'où $\max(A) = 5$.

Montrons maintenant que A n'est pas minoré. Montrer que quelque chose n'existe pas n'est souvent pas facile. On raisonne donc plutôt par l'absurde. Supposons par l'absurde que A soit minoré. Alors il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \in A$, on a $m \leqslant a$. On devine que la contradiction va venir du fait que l'on peut trouver un élément strictement inférieur à m et qui va être dans A, vu la définition de A. Cependant on ne sait pas a priori si $m \in A$, de sorte que l'on ne peut pas conclure directement que par exemple $m - 1 \in A$ pour obtenir l'absurdité. On pourrait étudier séparemment les cas $m \in A$ et $m \notin A$. Mais en réalité on peut déduire que $m \in A$. Comme $5 \in A$, on a donc $m \leqslant 5$. Comme A est l'intervalle $]-\infty, 5]$, on a donc $m \in A$ et donc également $m - 1 \in A$. Mais puisque de nouveau m est un minorant de A, on devrait ainsi avoir $m \leqslant m - 1$. Ce qui est absurde. □

2. $B =]-\infty, 5[$ est majoré par 5 mais n'admet pas de maximum. La preuve est laissée en exercice (raisonner par l'absurde pour montrer que B n'admet pas de maximum).
3. $C = [3, 5] \cup [10, 12]$ admet 3 comme minimum et 12 comme maximum. La preuve est laissée en exercice.

0.3 Bases sur les Fonctions

Soient E et F deux ensembles. Une fonction f de E dans F [3], notée $f : E \to F$, est un objet caractérisé par la donnée de :

- E appelé l'espace de départ,
- F appelé l'espace d'arrivée,
- $\mathcal{G}_f$ un sous ensemble de $E \times F$ satisfaisant la propriété

$$\forall x \in E, \forall (y, y') \in F^2, \Big((x, y) \in \mathcal{G}_f \text{ et } (x, y') \in \mathcal{G}_f \Big) \Rightarrow y = y'. \tag{0.3.1}$$

L'ensemble $\mathcal{G}_f$ est appelé le *graphe* de f.

La condition (0.3.1) est essentielle car c'est elle qui garantie principalement que l'on a bien affaire à une fonction. En effet soit $(x, y) \in E \times F$, alors si $(x, y) \in \mathcal{G}_f$, il n'existe pas d'autre $y' \in F$ tel que $(x, y') \in \mathcal{G}_f$. Comme ce y est donc associé de manière unique à x via f, on lui donne un nom : c'est l'image de x par f, et on lui donne une notation : $f(x)$.

Notez qu'une fonction de E dans F n'est pas forcément définie sur E tout entier. Elle est définie sur l'ensemble des éléments $x \in E$ tel qu'il existe $y \in F$ satisfaisant $(x, y) \in \mathcal{G}_f$, ce que l'on écrit en pratique $y = f(x)$. Cet ensemble est appelé le domaine de définition de f et on le note D_f.

Résumons le vocabulaire vu jusqu'ici et complétons-le.

3. Pour en savoir plus sur la définition d'une fonction voir notamment la page suivante `https://fr.wikipedia.org/wiki/Relation_binaire#Relation_fonctionnelle`.

Vocabulaire. Soit $f : E \to F$ une fonction.

— *Domaine de définition* de $f : E \to F$: c'est l'ensemble

$$D_f = \{x \in E \,/\, \exists y \in F,\ y = f(x)\},$$

Lorsque $D_f = E$ (f est définie sur E tout entier), on utilise le terme d'application à la place de celui de fonction. Une *application* $f : E \to F$ est ainsi une fonction de E dans F tel que $D_f = E$.

On utilisera parfois le terme moins répandu dans la littérature de *domaine de définition naturel* pour signifier le plus grand domaine de définition de la fonction sur lequel son expression a un sens.

— *Image* : pour $x \in D_f$, l'élément $y = f(x) \in F$ est appelé l'image de x par f. L'élément x est alors un *antécédent* de y par f. Enfin l'ensemble $\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \,/\, \exists x \in E,\ y = f(x)\}$ est appelé l'image de f.

— *Le graphe de* f : c'est l'ensemble $\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \,/\, x \in D_f\} \subset E \times F$.

Remarque 0.30: Une confusion extrêmement répandue est de confondre la fonction $f : E \to F$ avec l'image d'un $x \in E$, $f(x)$ qui est un élément de F. La fonction f est une collection de "flèches" qui pointent des éléments de E vers des éléments de F avec la condition que pour chaque $x \in D_f$, la flèche n'a qu'une seule destination (condition dite "fonctionnelle"). C'est par conséquent un objet complètement différent d'un élément de F[4].

Il ne faut donc surtout pas dire "soit la fonction $f(x)$", ou par exemple "soit la fonction x^2". Voici des manières d'introduire cette dernière fonction correctement :

— soit la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$,

— ou soit la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ (si on ne souhaite pas lui donner de nom),

— ou encore soit la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

Il faut ensuite préciser immédiatement le domaine de définition puisque comme nous l'avons vu précédemment, l'écriture $f : E \to F$ ne présume pas a priori que $D_f = E$. On dira ainsi par exemple "soit la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2, \end{array}$$

définie sur $D_f = \mathbb{R}_+$." Cette fonction f introduite associe donc à tout $x \geqslant 0$, le réel $f(x) = x^2$. Nous avons choisi de ne pas la définir pour les $x < 0$, même si la quantité

4. Si vous avez jeté un oeil à la définition d'une fonction comme une relation binaire fonctionnelle, vous saurez alors qu'une fonction est précisément la donnée d'un triplet $(E, F, \mathcal{G})$ où $\mathcal{G} \subset E \times F$. On remarque donc bien que c'est un objet complètement différent de l'élément $f(x) \in F$

x^2 a bien un sens. En pratique, quand l'expression de la fonction est simple comme dans cet exemple et que l'on écrit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2, \end{array}$$

on signifie implicitement que f est définie sur $\mathbb{R}$ et donc on peut se passer de préciser D_f. Si on avait voulu ne définir f que sur $\mathbb{R}_+$, on aurait ainsi directement affirmé : soit f la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

Si on souhaite lever toute ambiguïté de langage, on peut simplement dire : soit l'application f

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

et alors il est clair que $D_f = \mathbb{R}$.

Notez que dans les écritures $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ et $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$, il est également implicite que f est définie sur $\mathbb{R}$ puisque cette notation dit littéralement "à $x \in \mathbb{R}$ on associe la quantité x^2".

Exemple 0.31: — Le graphe de l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est par définition un sous ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Il définit une courbe appelée "parabole" que vous avez l'habitude de tracer !

— Les antécédents de 4 par l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ sont les réels 2 et -2. L'image de 3 par f est 9. L'élément -1 n'admet pas d'antécédent par f.

— Soit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x}. \end{array}$$

Alors son domaine de définition naturel est $D_f = \mathbb{R}^*$. On peut également choisir de la définir sur tout sous ensemble de $\mathbb{R}^*$. Pour une fonction aussi simple, on écrira en pratique directement : soit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x}. \end{array}$$

On signifie implicitement que f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Pour lever toute ambiguïté, on peut dire plutôt : soit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x}, \end{array}$$

et il est alors clair que $D_f = \mathbb{R}^*$. On peut alternativement dire

— "soit la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$",
— ou encore plus rigoureusement "soit l'application $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$".

Si on souhaitait vous poser la question de déterminer le domaine de définition naturelle de cette fonction, alors on pourrait écrire : "déterminer le domaine de définition naturel de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$". La fonction est écrite de manière formelle ici et avec le contexte, on sait que x est implicitement une variable réelle.

— Voici une situation où le domaine de définition est plus difficile à déterminer. On écrirait par exemple "déterminer le domaine de définition naturel de la fonction $f : x \mapsto \ln(\sin(x))$". Il faudrait répondre que le domaine de définition naturel de f est $D_f = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}]2k\pi, \pi + 2k\pi[$.

— Pour terminer, voici un exemple qui fournit une justification supplémentaire (autre que le respect des objets mathématiques) de pourquoi il ne faut pas introduire une fonction en affirmant "soit la fonction $f(x)$...".

Supposons que l'on fasse la confusion entre la fonction f et son évaluation $f(x)$. Considérons par exemple l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$. On a $f(0) = 0$. Ainsi on pourrait affirmer dans ce cas que la fonction f est nulle. Ce qui est contradictoire puisque pour tout $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$. Dit autrement affirmer

1. qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est nulle,
2. qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'annule, c'est-à-dire qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$,

sont deux déclarations différentes ! Par conséquent faire la confusion entre "soit la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ et "soit la fonction x^3", ne permet plus de différencier correctement 1. et 2..

Définition 0.32 (Composée de fonctions): *Soient E, F, G trois ensembles et les fonctions $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On appelle composée de f et g la fonction $x \mapsto g(f(x))$ que l'on note $g \circ f$.*

Remarque 0.33: Quand on écrit une composée de fonctions, il faut faire très attention aux domaines de définitions des deux fonctions. Pour que la quantité $g(f(x))$ ait un sens pour tout $x \in D_f$, il faut que pour tout $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$, soit écrit autrement $f(D_f) \subset D_g$.

Exemple 0.34: En exercice écrire les fonctions composées $f \circ g$ et $g \circ f$ pour les fonctions suivantes

— $f : x \mapsto 2x^2$ et $g : x \mapsto x^3$,
— $f : x \mapsto \sin(x)$ et $g : x \mapsto x^4$,
— $f : x \mapsto \cos(x)$ et $g : x \mapsto x$,
— $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x^2}$.

Terminons cette section de cadrage sur les fonctions par les notions d'injectivité, surjectivité et bijectivité.

Définition 0.35: *Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$. On dira que*

— *f est injective si et seulement si : pour tous $x \in D_f$, $x' \in D_f$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$. Cette assertion se réécrit de manière équivalente (en prenant la contraposée de l'implication)*

$$\forall (x, x') \in D_f^2,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Une fonction injective est une fonction telle que tout élément de F admet au plus un antécédent par f dans E.

— *f est surjective si et seulement si : $\forall y \in F$, $\exists x \in E$, $y = f(x)$. Tous les éléments de F admettent au moins un antécédent par f dans E. C'est équivalent à dire que $\mathrm{Im}(f) = F$.*

— *f est bijective si et seulement si f est injective et surjective. Ainsi tous les éléments de F admettent exactement un antécédent par f dans E. Dans ce cas on définit l'application réciproque $f^{-1} : F \to D_f$ telle que pour tout $(x, y) \in D_f \times F$, $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ soit encore pour tout $(x, y) \in D_f \times F$, $y = f(f^{-1}(y))$ et $x = f^{-1}(f(x))$.*

Remarque 0.36: On dit que deux ensembles E et F sont en bijection (ou équipotent) s'il existe une application $f : E \to F$ ($D_f = E$) qui est une bijection. L'étude des ensembles en bijection est une question fondamentale en mathématiques puisque deux tels ensembles vont se "ressembler" à travers la correspondance définie par f. La nature de la ressemblance dépendra de propriétés annexes vérifiées par la fonction f (par exemple sa régularité). Cela permet ensuite de classer les ensembles en différentes catégories en définissant des invariants...

En exercice vous pouvez reprendre l'ensemble des fonctions dites "usuelles" (polynomiales, $x \mapsto \frac{1}{x^n}$, trigonométriques, exponentielle, logarithme) en précisant leurs domaines de définition naturels et en traçant leurs graphes. Nous reverrons ces fonctions ensemble plus tard dans le semestre, mais il est tellement important de les connaître parfaitement que vous pouvez déjà commencer maintenant (et refaire cet exercice régulièrement) !