Licence 1re année
Mathématiques et calcul
1er semestre

Quentin Denoyelle
quentin.denoyelle@u-paris.fr

(avec la collaboration de
A. Chambaz, L. Moisan et F. Benaych)

Université Paris Cité, campus Saint-Germain-des-Près

5. Fonctions usuelles

6. Développements limités

Fonctions logarithme, exponentielle et puissance

La fonction logarithme

Théorème : Il existe une unique fonction (notée $\ln$) définie sur $]0, +\infty[$ telle que $\ln(1) = 0$ et

$$\forall x > 0, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Propriétés du logarithme

- $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(a.b) = \ln a + \ln b$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b), \quad \ln(1/a) = -\ln(a)$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(a^n) = n.\ln a$
- La fonction logarithme est une bijection continue et strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\forall x > 0, \quad \ln x \leq x - 1$

- Tangente en $x = 1$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

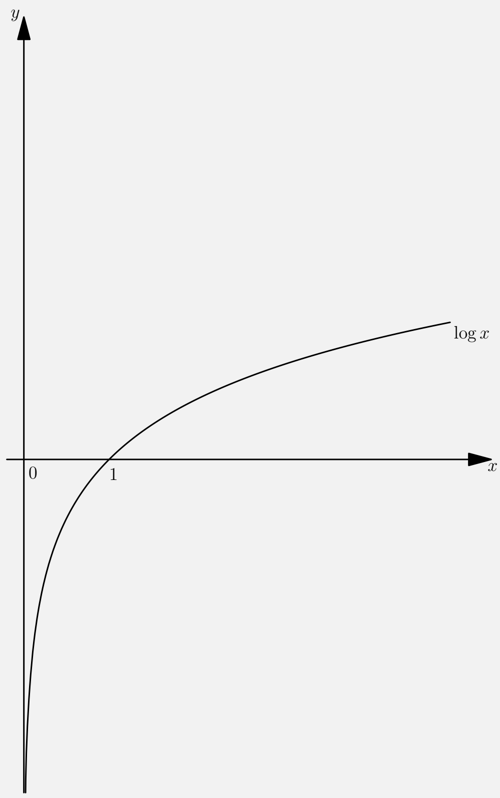
ou encore,

$$\ln(1+h) \underset{h \to 0}{\sim} h$$

- Position par rapport à la tangente :

$$\forall h \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+h) \leq h.$$

Graphe de la fonction logarithme



Exercice : Donner les limites suivantes :

1. $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{2x+1}{2x-5}\right)$
2. $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{e^x}\right)$
3. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln(x)+1}{x}$
4. $\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

La fonction exponentielle

La fonction réciproque de la fonction logarithme s'appelle la fonction exponentielle.

Notation : $\exp(x)$ ou e^x

$\exp$ est une fonction continue et strictement croissante définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$

On a : $\begin{cases} \exp\left(\ln x\right) & = & x & \forall x > 0 \\ \ln\left(\exp(x)\right) & = & x & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Propriétés de la fonction exponentielle

- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \exp(a+b) = \exp(a).\exp(b)$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \exp(a-b) = \exp(a)/\exp(b)$
- $\exp(0) = 1$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \exp(-a) = 1/\exp(a)$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \exp(n.a) = \left(\exp(a)\right)^n$
- $\exp' = \exp$

Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème. Soit I un intervalle ouvert et $f : I \longrightarrow f(I) = J$ une fonction dérivable dont la dérivée reste de signe constant et ne s'annule pas sur I. Alors :

- f est bijective (et strictement monotone) ;
- sa fonction réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est dérivable et

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Justification de la formule : en notant $g = f^{-1}$ la fonction réciproque de f, on peut écrire

$$\forall x \in J, \quad (f \circ g)(x) = x$$

donc $(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big).g'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \dfrac{1}{f'\big(g(x)\big)}$

Dérivée de l'exponentielle

$$(\ln \circ \exp)(x) = x$$

$$(\ln \circ \exp)'(x) = \ln'\big(\exp(x)\big).\exp'(x) = 1$$

Donc : $$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'\big(\exp(x)\big)} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x)$$

Limites de l'exponentielle

On a :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Exercice : Montrer ces limites, en utilisant ce que l'on sait de la fonction logarithme.

Exercice : Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est continue et dérivable, de dérivée continue.

Graphe d'une fonction réciproque

Si f est bijective, on a :

$\forall x, \quad (f \circ f^{-1})(x) = x \qquad$ et $\qquad (f^{-1} \circ f)(x) = x.$

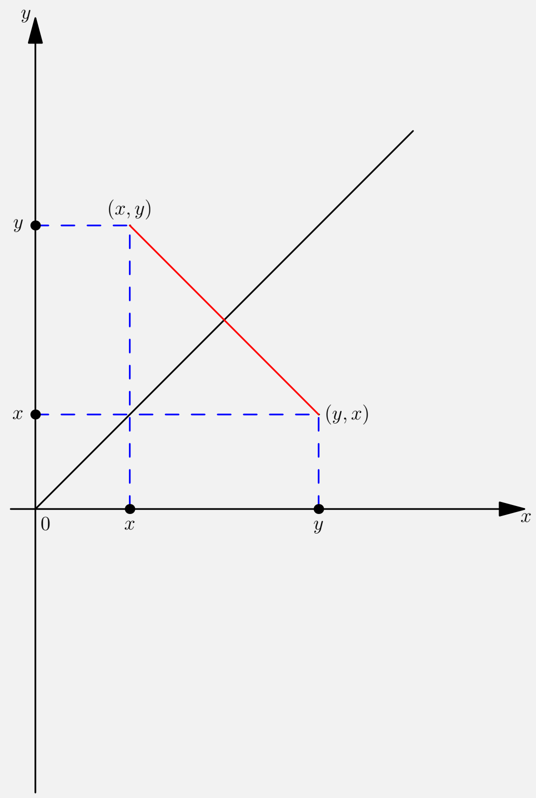
$$\text{donc} \quad y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

Soit $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ le graphe de la fonction f :

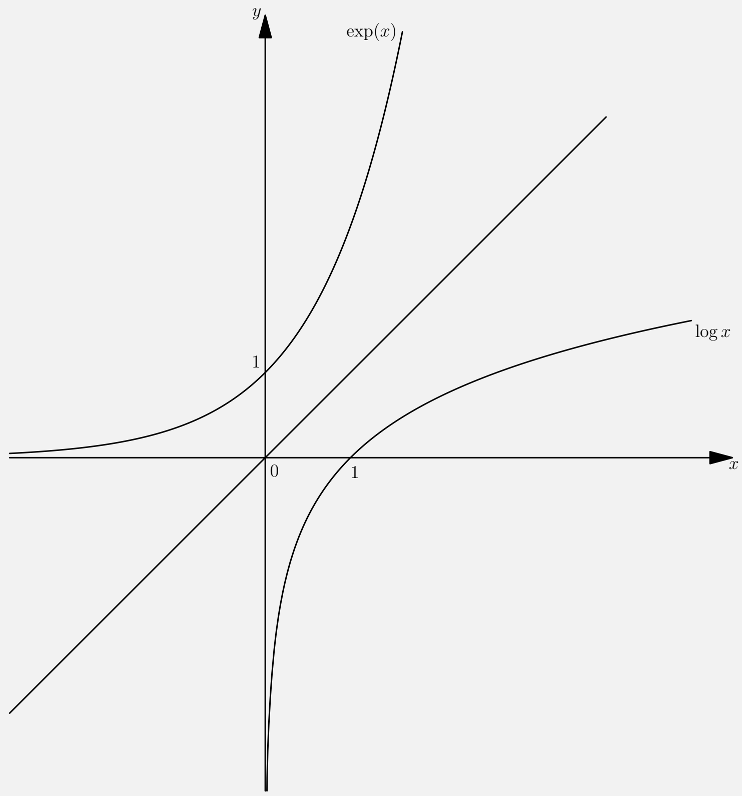
$(x, y) \in G_f \quad \Leftrightarrow \quad (y, x) = (y, f^{-1}(y)) \in G_{f^{-1}}$

Autrement dit, on passe du graphe d'une fonction au graphe de sa fonction réciproque en échangeant les axes des abcisses et des ordonnées (ce qui revient à symétriser la figure par rapport à la droite d'équation $y = x$)

Graphe d'une fonction réciproque



Graphe de la fonction exponentielle



La fonction puissance b

Soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ on appelle « a puissance b » le nombre réel définit par :

$$a^b = \exp(b.\ln a)$$

Propriétés :

- $1^b = 1 = a^0$
- $a^b \times a^c = a^{b+c}$
- $a^b / a^c = a^{b-c}$
- $1/a^b = a^{-b}$
- $(a^b)^c = a^{bc}$
- $a^b \times c^b = (ac)^b$
- $(a^b)/(c^b) = (a/c)^b$

La fonction puissance b

Soit $b \in \mathbb{R}$, la fonction :

$$\begin{array}{rccl} u : &]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & u(x) = x^b = \exp(b.\ln x) \end{array}$$

s'appelle la fonction puissance b.

Dérivées des fonctions puissance

$$u(x) = x^b = \exp(b.\ln x)$$

$$u'(x) = \exp'(b.\ln x).(b.\ln' x) = \exp(b.\ln x)\frac{b}{x}$$

$$u'(x) = b.\exp(-\ln x).\exp(b.\ln x) = b.\exp\big((b-1).\ln x\big)$$

$$u'(x) = b\,x^{b-1}$$

Propriétés des fonctions puissance

$b \in \mathbb{R},\ x \in]0,+\infty[,\quad u(x) = x^b = exp(b.\ln x),\quad u'(x) = b\,x^{b-1}$

- $b > 0$
  - $u'(x) = b\,\exp\big((b-1)\ln x\big) > 0$: la fonction puissance b est strictement croissante.
  - $\lim_{x\to+\infty}(b.\ln x) = +\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to+\infty} x^b = +\infty$
  - $\lim_{x\to 0}(b.\ln x) = -\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0} x^b = 0$:

    la fonction puissance b se prolonge par continuité en 0 en posant : $u(0) = 0$
  - Si $b > 1$: $\lim_{x\to 0}\dfrac{u(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x^{b-1} = \lim_{x\to 0}\exp\big((b-1)\ln x\big) = 0$:

    la fonction puissance b est dérivable à droite en 0, $u'_d(0) = 0$, et la tangente au graphe est horizontale.
  - Si $0 < b < 1$: $\lim_{x\to 0}\dfrac{u(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x^{b-1} = \lim_{x\to 0}\exp\big((b-1)\ln x\big) = +\infty$:

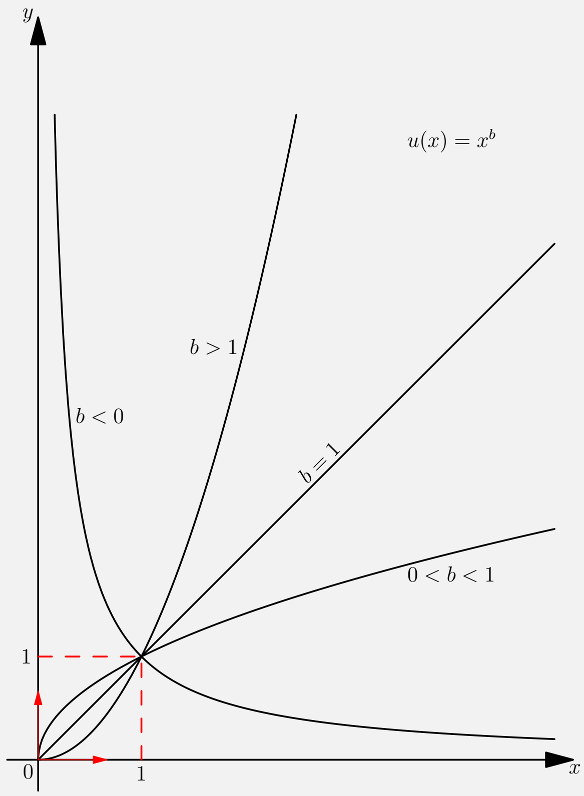
    la fonction puissance b n'est pas dérivable en 0, la tangente au graphe est verticale.

Propriétés des fonctions puissance

$b \in \mathbb{R},\ x \in]0,+\infty[,\quad u(x) = x^b = exp(b.\ln x),\quad u'(x) = b\,x^{b-1}$

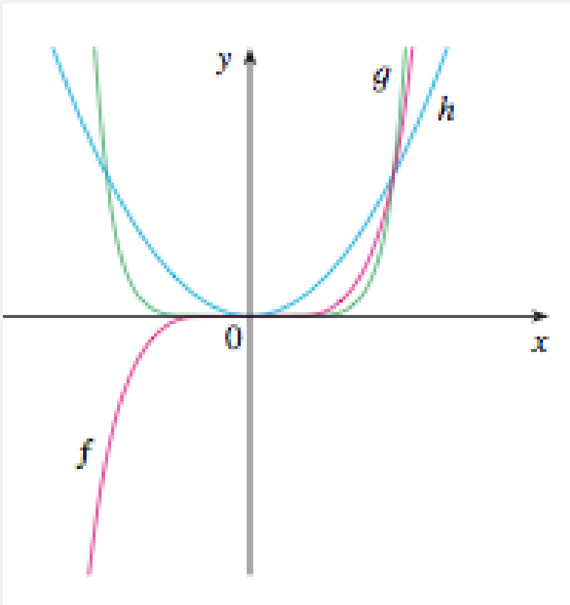
- $b < 0$
  - $u'(x) = b\,\exp\big((b-1)\ln x\big) < 0$: la fonction puissance b est strictement décroissante.
  - $\lim_{x\to+\infty}(b.\ln x) = -\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to+\infty} x^b = 0$
  - $\lim_{x\to 0}(b.\ln x) = +\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0} x^b = +\infty$
- $b = 0$. La fonction puissance 0 est constante de valeur 1.

Graphes des fonctions puissance



Exercice : Associer chacune des équations suivantes avec une des courbes :

$$y = x^2 \quad ; \quad y = x^5 \quad ; \quad y = x^8$$



Exponentielle de base a

Soit $a > 0$. La fonction

$$\begin{array}{rccl} v : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & v(x) = a^x = \exp\big(x.\ln(a)\big) \end{array}$$

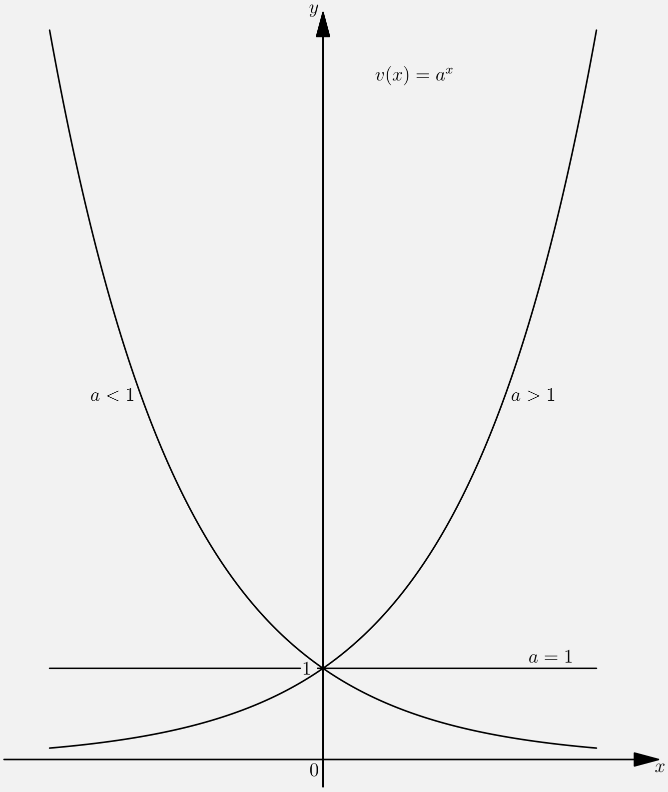
s'appelle la fonction exponentielle de base a

$$v'(x) = \ln(a).\exp\big(x.\ln(a)\big) = \ln(a).a^x$$

Propriétés de l'exponentielle de base a $v(x) = a^x = \exp\big(x.\ln(a)\big)$ $\quad v'(x) = \ln(a).a^x$

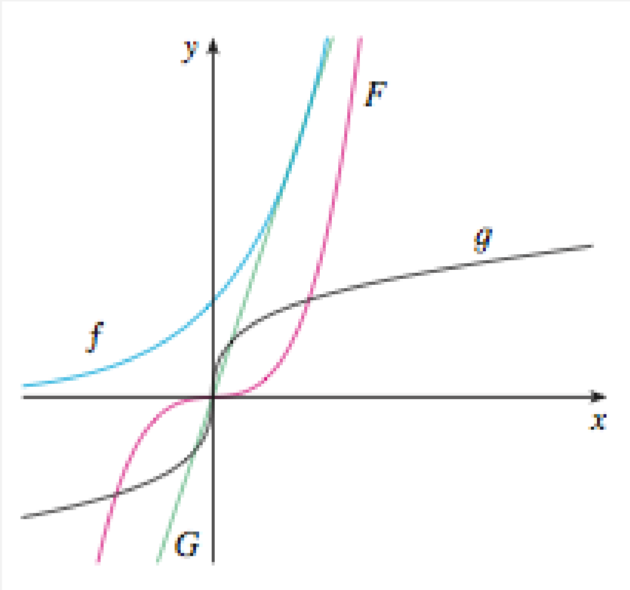
- Si $a > 1$:
  1. $\ln a > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad v'(x) > 0$
     la fonction exponentielle de base a est strictement croissante.
  2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x.\ln(a) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \exp\big(x.\ln(a)\big) = +\infty$
  3. $\lim\limits_{x \to -\infty} x.\ln(a) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \exp\big(x.\ln(a)\big) = 0$
- Si $a < 1$:
  1. $\ln a < 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad v'(x) < 0$
     la fonction exponentielle de base a est strictement décroissante.
  2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x.\ln(a) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \exp\big(x.\ln(a)\big) = 0$
  3. $\lim\limits_{x \to -\infty} x.\ln(a) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \exp\big(x.\ln(a)\big) = +\infty$

Graphe de l'exponentielle de base a



Exercice : Associer chacune des équations suivantes avec une des courbes :

$$y = 3x \quad ; \quad y = x^3 \quad ; \quad y = 3^x \quad ; \quad y = x^{\frac{1}{3}}$$



$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\forall x > 0, \quad \ln x < x \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\sqrt{x}\right) < \sqrt{x}$$

$$\forall x > 1 : \quad 0 \leq \frac{\ln x}{x} = \frac{2\ln\left(\sqrt{x}\right)}{x} = 2\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Si $u(x) = e^x$: $\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(u(x)\right)}{u(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln e^x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$a > 0,\ b > 0,\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)^b}{x^a} = 0$$

$$\frac{\big(\ln(x)\big)^b}{x^a} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{a}{b}}}\right)^b = \left(\frac{\frac{b}{a}\ln x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{a}{b}}}\right)^b = \left(\frac{b}{a}\right)^b \left(\frac{\ln x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{a}{b}}}\right)^b$$

En posant $u(x) = x^{\frac{a}{b}}$: $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)^b}{x^a} = 0$$

Exercice : Montrer les limites suivantes :

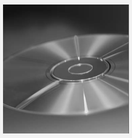
1. Pour $a > 0,\ b > 0,\quad \lim\limits_{x\to 0} x^a \big|\ln x\big|^b = 0$
2. Pour $a > 0,\ b > 0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(ax)}{x^b} = +\infty$
3. Pour $a > 0,\ b > 0,\quad \lim\limits_{x\to-\infty} |x|^b \exp(ax) = 0$
4. Pour $a > 0,\ b > 0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(ax)}{(\ln(x))^b} = +\infty$

Exercice : Donner les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$.

1. $f(x) = x^{-5}\ln(|x|) - x^2 + \ln(|x|)$
2. $f(x) = x^{-5}e^{2x} + x^{-2}e^{-x} - 3x^4 - 2x^2$
3. $f(x) = x^{-3}\ln(|x|) - x^2 + \ln(|x|) + e^x + e^{-x}$

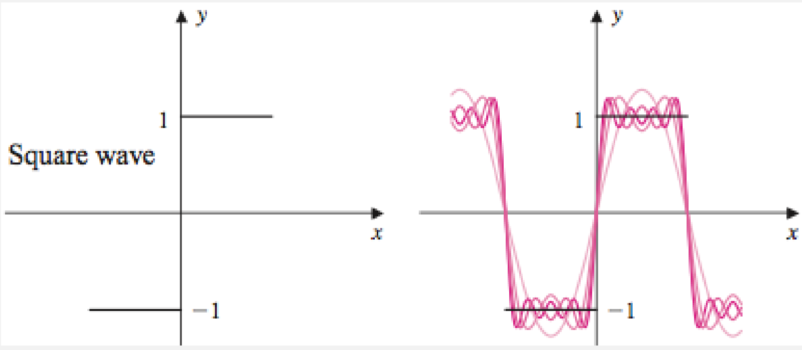
Fonctions trigonométriques réciproques

Fonctions trigonométriques et théorie du signal



Signal : quantité variant
avec le temps. Permet de coder musique, films, etc...

Théorie de Fourier : Tout signal périodique de période T est, à une approximation près, un mélange de fonctions trigonométriques $\sin(\frac{2k\pi t}{T})$ et $\cos(\frac{2k\pi t}{T})$ ($k \in \mathbb{Z}$).



Plus le nombre de fonctions trigonométriques utilisées est important, plus l'approximation est bonne

La fonction sinus sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

La fonction sinus est continue et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, à valeurs dans l'intervalle $]-1, 1[$

$$\sin' x = \cos x > 0 \text{ puisque } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

La fonction sinus est donc continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, c'est donc une bijection de cet intervalle sur l'intervalle $]-1, 1[$.

La fonction Arcsinus

La restriction de la fonction sinus à $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ admet une réciproque, la fonction Arcsin $:]-1,1[\longrightarrow]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, qui vérifie :

- Arcsin est continue et strictement croissante
- $\begin{cases} \sin(\operatorname{Arcsin} x) &= x \quad \forall x \in]-1,1[\\ \operatorname{Arcsin}(\sin x) &= x \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\end{cases}$

  Attention, bien que les deux termes soient toujours définis, on n'a pas $\operatorname{Arcsin}(\sin x) = x$ pour tout x réel !
- $\forall x \in]-1,1[, \quad \cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$

  Preuve : on a $\cos^2(\operatorname{Arcsin} x) = 1 - \sin^2(\operatorname{Arcsin} x) = 1 - x^2$ avec $\operatorname{Arcsin} x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\ \Rightarrow \ \cos(\operatorname{Arcsin} x) > 0.$

La dérivée de Arcsinus

Sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, la dérivée de la fonction sinus ($\cos$) est de signe constant et ne s'annule pas, donc la fonction Arcsinus est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sin'\left(\operatorname{Arcsin} x\right)} = \frac{1}{\cos\left(\operatorname{Arcsin} x\right)}$$

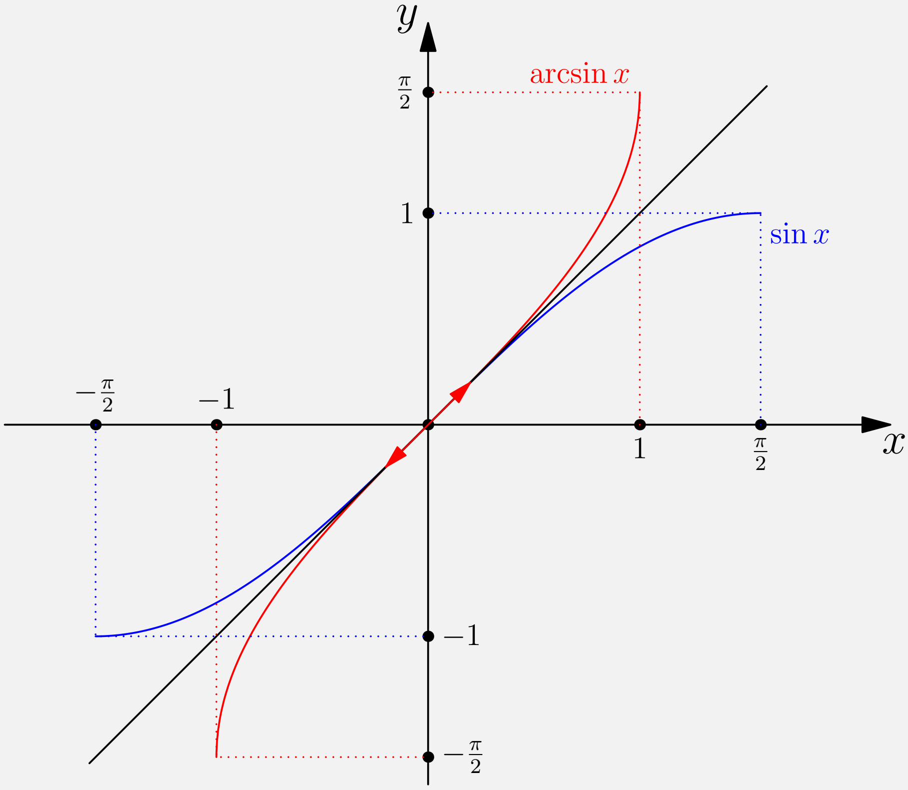
$$\text{donc} \quad \forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Définition de Arcsinus sur $[-1, 1]$

La fonction sinus est aussi une bijection continue de $[-\pi/2, \pi/2]$ vers $[-1, 1]$, ce qui permet d'étendre la fonction Arcsinus comme une bijection continue de $[-1, 1]$ vers $[-\pi/2, \pi/2]$.

Attention : Arcsinus n'est pas dérivable en -1 et en 1.

Les graphes de Sinus et Arcsinus



La fonction cosinus sur $]0\,,\pi[$

La fonction cosinus est continue et dérivable sur $]0\,,\pi[$, à valeurs dans $]-1\,,1[$

$$\cos' x = -\sin x < 0 \text{ puisque } x \in]0\,,\pi[$$

La fonction cosinus est donc continue et strictement décroissante sur $]0\,,\pi[$, c'est donc bijection de cet intervalle sur l'intervalle $]-1\,,1[$.

La fonction Arccosinus

La restriction de la fonction cosinus à $]0, \pi[$ admet une réciproque, la fonction Arccos $:]-1\,,1[\longrightarrow]0, \pi[$, qui vérifie :

- Arccos est continue et strictement décroissante
- $\begin{cases} \cos(\operatorname{Arccos} x) & = & x & \forall x \in]-1\,,1[\\ \operatorname{Arccos}(\cos x) & = & x & \forall x \in]0\,,\pi[\end{cases}$
- $\forall x \in]-1, 1[, \ \sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$
- $\forall \alpha, \ \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x\right) = \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$

$\Rightarrow \operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x\right)\right) = \operatorname{Arccos}(x)$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arccos}(x)$ car $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x \in]0, \pi[$

donc $\forall x \in]-1, 1[, \quad \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$

La dérivée de Arccosinus

La fonction Arccosinus est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{Arccos}'(x) = -\operatorname{Arcsin}' x$$

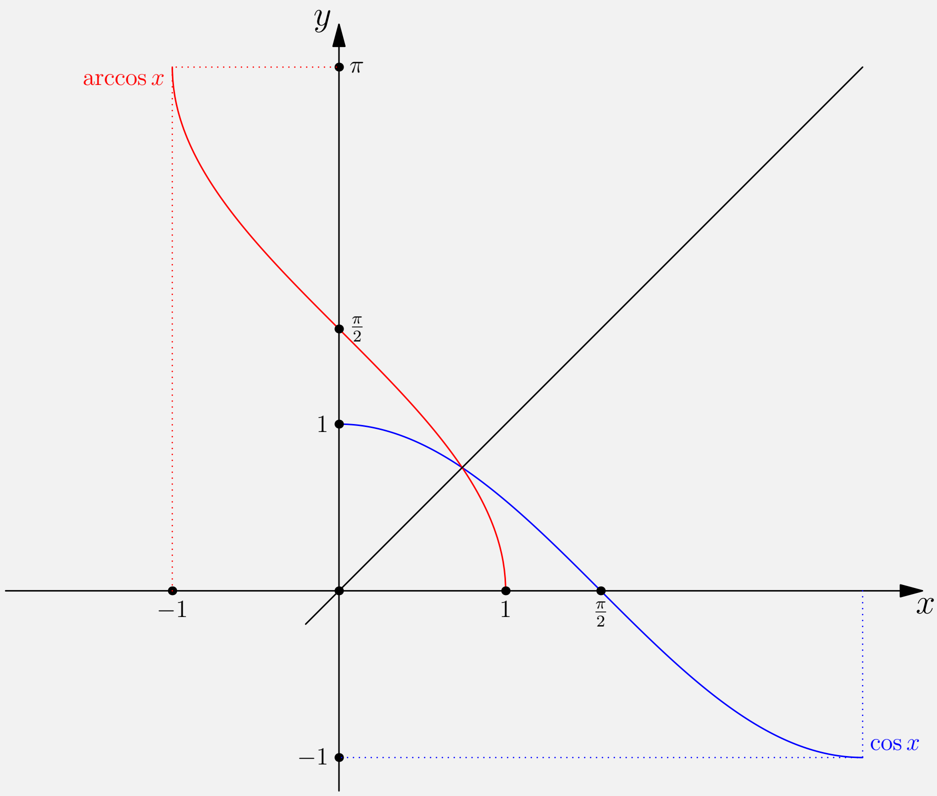
$$\operatorname{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Définition de Arccosinus sur $[-1, 1]$

La fonction cosinus est aussi une bijection continue de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$, ce qui permet d'étendre la fonction Arccosinus comme une bijection continue de $[-1, 1]$ vers $[0, \pi]$.

Attention : Arccosinus n'est pas dérivable en -1 et en 1.

Les graphes de Cosinus et Arccosinus



La fonction tangente sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

La fonction tangente est définie par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \forall x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$

La fonction tangente est périodique de période π.

La dérivée de la fonction tangente

La fonction tangente est continue et dérivable, comme quotient de fonction continues et dérivables, sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

La fonction tangente est donc continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, c'est donc une bijection de cet intervalle sur $\mathbb{R}$.

La fonction Arctangente

La restriction de la fonction tangente à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ admet une réciproque, la fonction $\text{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, qui vérifie :

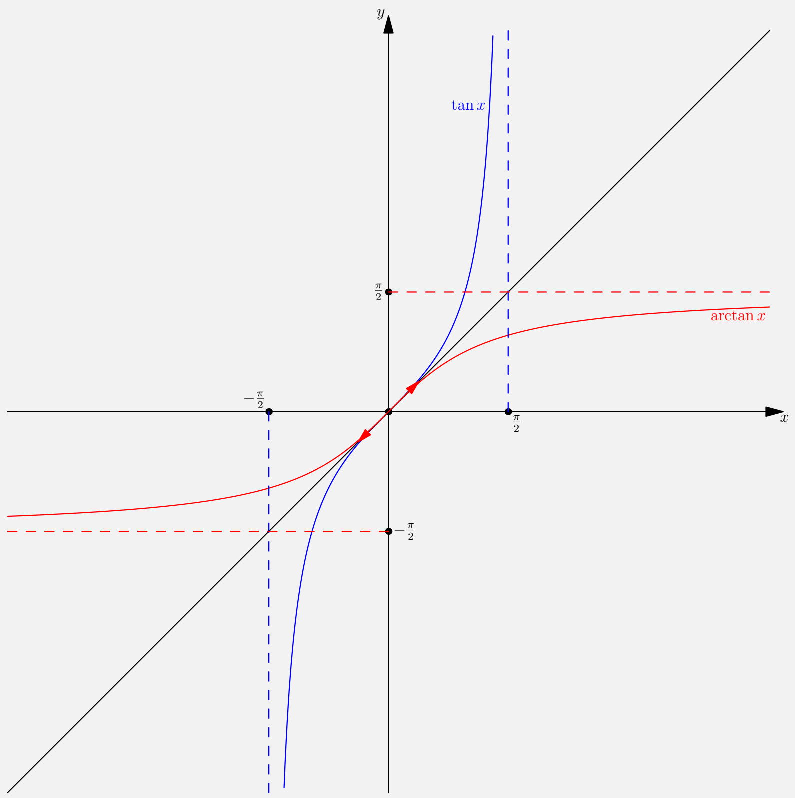
- Arctan est continue et strictement croissante
- $\begin{cases} \tan(\text{Arctan}\, x) = x & \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{Arctan}(\tan x) = x & \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$
- $\lim_{x \to +\infty} \text{Arctan}\, x = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to -\infty} \text{Arctan}\, x = -\frac{\pi}{2}$

La dérivée de Arctangente

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \tan' x \neq 0$, donc la fonction Arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\text{Arctan}' x = \frac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan}\, x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Les graphes de Tangente et Arctangente



Équations trigonométriques

Équation $\sin x = a, \quad a \in [-1, 1]$

Rappel : la fonction sinus est 2π-périodique, et impaire

$$a \in [-1, 1] \quad \Leftrightarrow \quad \exists \alpha \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \quad \alpha = \operatorname{Arcsin} a$$

$$\begin{aligned}
& \sin x = a \\
\Leftrightarrow \quad & \sin x - \sin \alpha = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 2 \sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x = \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $\sin x = a$ est donc

$$S = \{\alpha + 2k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ avec } \alpha = \operatorname{Arcsin} a.$$

Équation $\cos x = a, \quad a \in [-1\,,1]$

Rappel : la fonction cosinus est 2π-périodique, et paire

$a \in [-1\,,1] \quad \Leftrightarrow \quad \exists \alpha \in [0\,,\pi] \quad \alpha = \operatorname{Arccos} a$

$$\begin{aligned}
& \cos x = a \\
\Leftrightarrow \quad & \cos x - \cos \alpha = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -2\sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x = \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $\cos x = a$ est donc

$$S = \{\alpha + 2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{-\alpha + 2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}} \text{ avec } \alpha = \operatorname{Arccos} a$$

Équation $\tan x = a, \quad a \in \mathbb{R}$

Rappel : la fonction tangente est π-périodique, et impaire

Elle n'est pas définie pour les réels de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

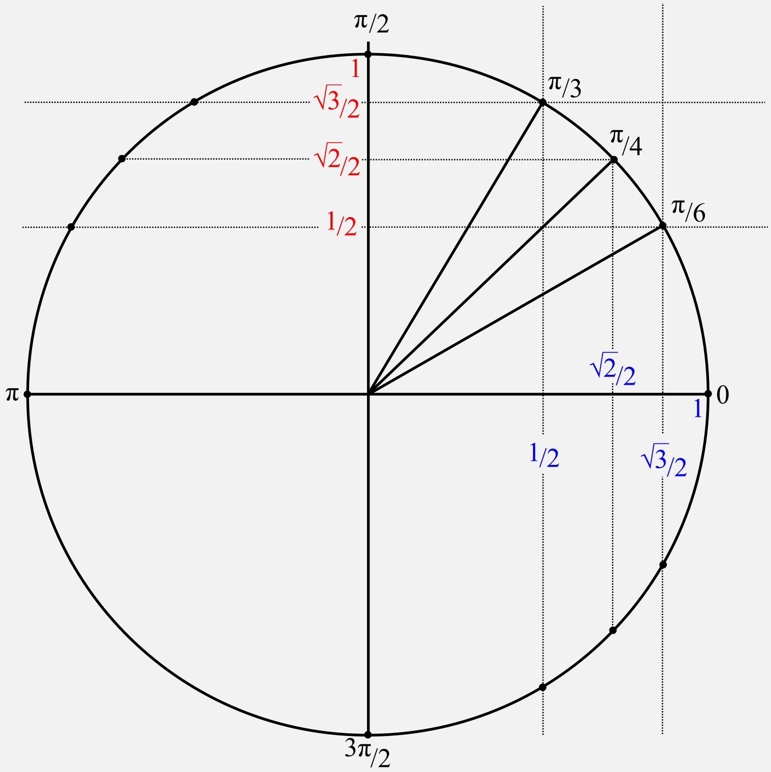
En posant $\alpha = \operatorname{Arctan}(a)$, l'équation $\tan x = a$ s'écrit

$$\tan x = \tan \alpha$$

Comme la fonction tangente est bijective sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et π-périodique, l'ensemble des solutions de l'équation $\tan x = a$ est donc

$$S = \{\alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{avec} \quad \alpha = \operatorname{Arctan}(a).$$

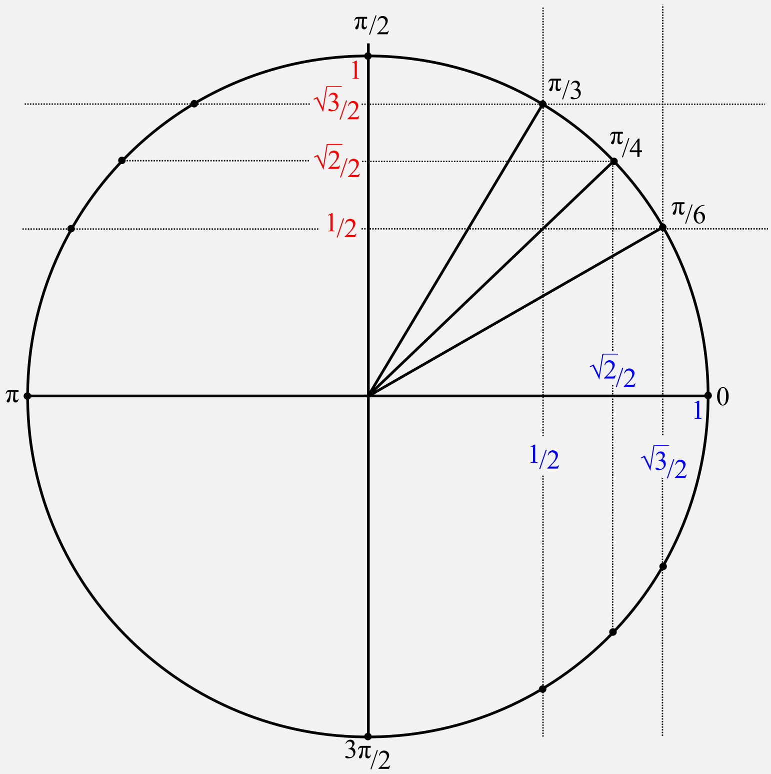
Valeurs remarquables pour Arcsin



t	$\operatorname{Arcsin} t$
1	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
0	0
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$
-1	$-\frac{\pi}{2}$

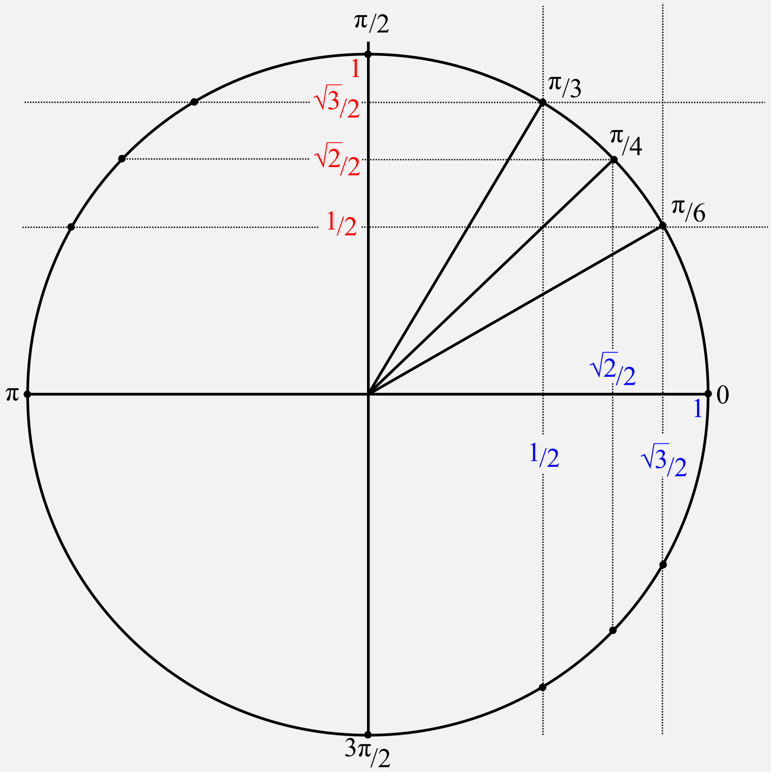
Fonctions usuelles
Valeurs remarquables de Arcsin, Arccos, Arctan

Valeurs remarquables pour Arccos



t	$\operatorname{Arccos} t$
1	0
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
0	$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
-1	π

Valeurs remarquables pour Arctan



t	$\operatorname{Arctan} t$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$
1	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{6}$
0	0
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{\pi}{6}$
-1	$-\frac{\pi}{4}$
$-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{3}$

Exercice : Résoudre l'équation $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice : Résoudre l'équation $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice : Résoudre l'équation $\tan(x) = \sqrt{3}$.

Fonctions hyperboliques

Les fonctions sinus et cosinus hyperboliques

On définit la fonction sinus hyperbolique par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

On définit la fonction cosinus hyperbolique par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Propriétés des fonctions sh et ch

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x)$: la fonction sh est impaire
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x)$: la fonction ch est paire
- $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x$ et $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x}$
- $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = \big(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)\big)\big(\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\big) = 1$

Fonctions circulaires et fonctions hyperboliques

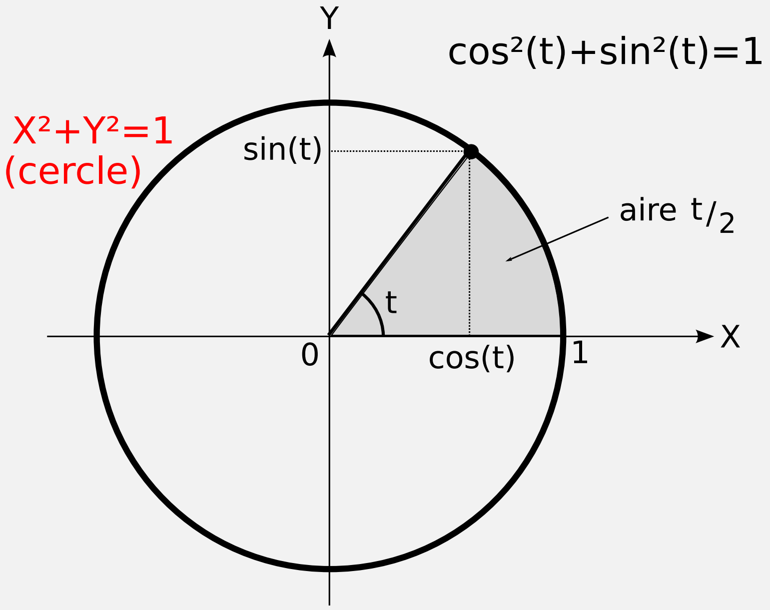
Les fonction cos et sin permettrent de représenter le cercle unité d'équation $X^2 + Y^2 = 1$ sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} X = \cos(t) \\ Y = \sin(t) \end{cases}, \; t \in [0, 2\pi].$$

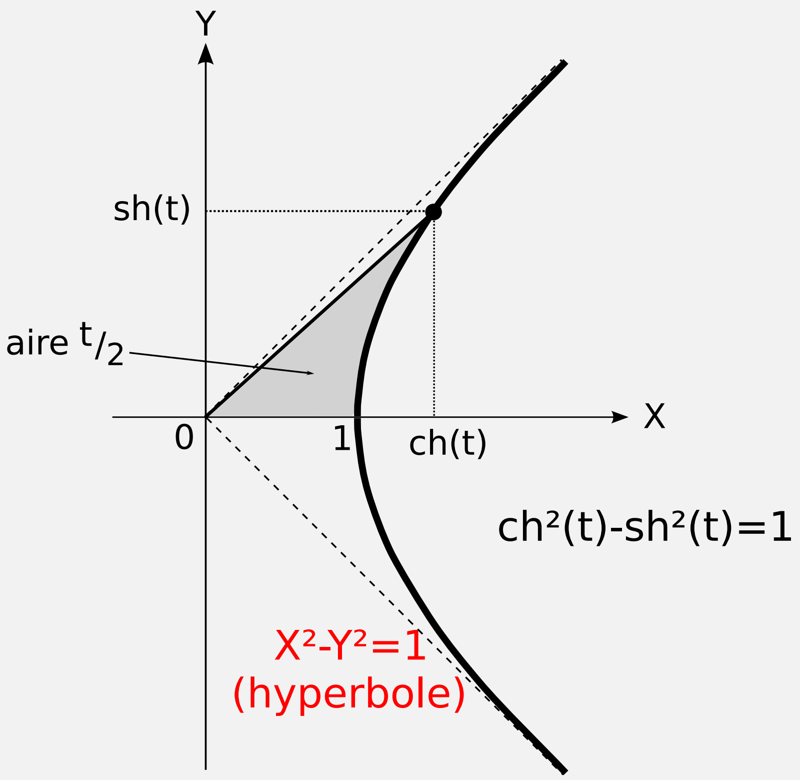
Il en va de même des fonctions ch et sh, qui permettent de représenter la branche $X > 0$ de l'hyperbole d'équation $X^2 - Y^2 = 1$ sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} X = \mathrm{ch}(t) \\ Y = \mathrm{sh}(t) \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Représentation paramétrique du cercle



Représentation paramétrique de l'hyperbole



Dérivées et variations de sh et ch

- $\text{sh}'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}(x)$
- $\text{ch}'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}(x)$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{sh}'(x) = \text{ch}(x) > 0$: sh est strictement croissante.

Si $x > 0 \quad x > -x \quad \Rightarrow \quad e^x > e^{-x}$ donc :

	Si $x > 0$	$\text{sh}(x) > 0$	$\Rightarrow$	ch croissante
Par imparité	Si $x < 0$	$\text{sh}(x) < 0$	$\Rightarrow$	ch décroissante

$\text{ch}(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \forall x \neq 0 \ \ \text{ch}(x) > 1$

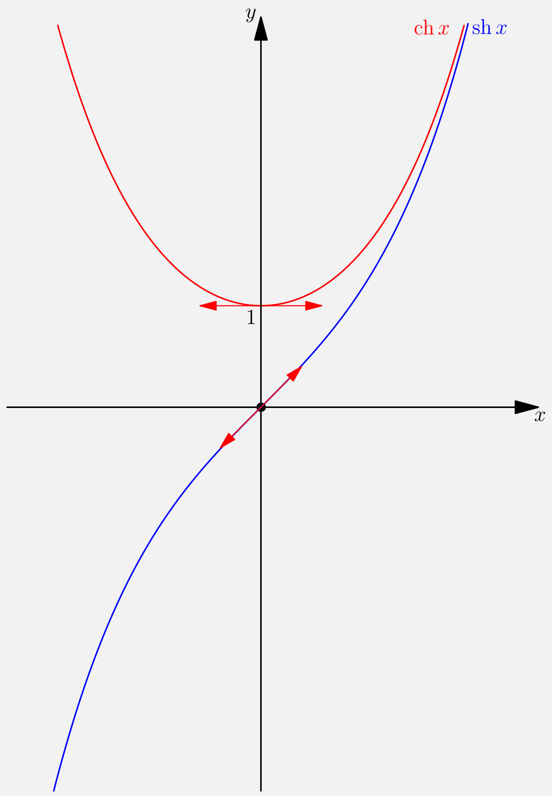
Limites des fonctions sh et ch

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

- $\lim_{x \to +\infty} \text{sh}(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \text{sh}(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \text{ch}(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \text{ch}(x) = +\infty$

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ \text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x} > 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{ch}(x) > \text{sh}(x) \\ \lim_{x \to +\infty} \big(\text{ch}(x) - \text{sh}(x)\big) = 0 \end{cases}$$

Les graphes de sh et ch



La fonction tangente hyperbolique

On définit la fonction tangente hyperbolique par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

Dérivée :

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{sh}'(x)\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}'(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}$$

$$\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$$

Variations et limites de $\mathrm{th}(x)$

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} > 0$$

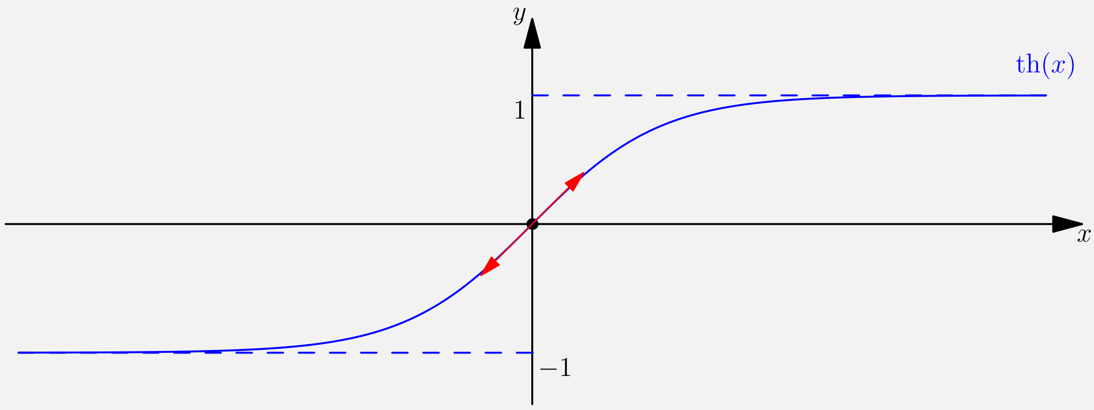
La fonction tangente hyperbolique est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1$$

La fonction th étant impaire : $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1$

Graphe de tangente hyperbolique



Équation $\operatorname{sh} x = a \quad a \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sh}(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad e^x - e^{-x} = 2a \quad \Leftrightarrow \quad (e^x)^2 - 2ae^x - 1 = 0$$

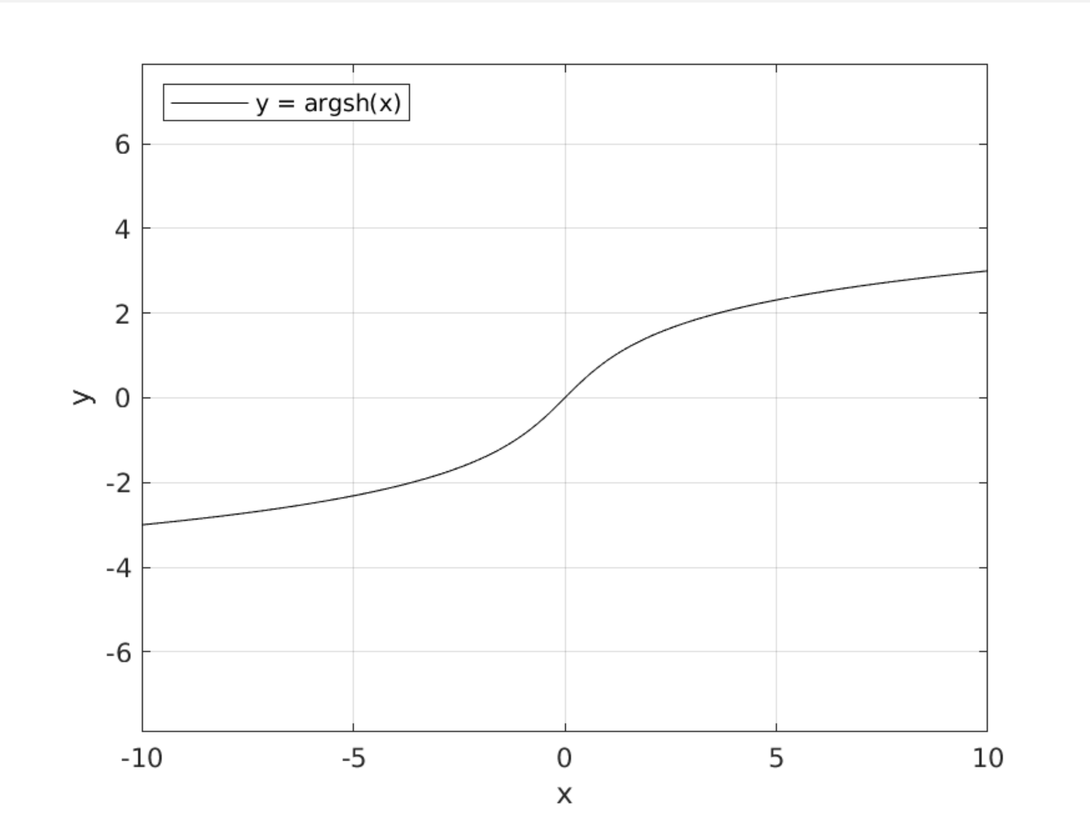
L'équation $X^2 - 2aX - 1 = 0$ a une seule racine positive : $a + \sqrt{a^2+1}$.

$$\operatorname{sh}(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\left(a + \sqrt{a^2+1}\right)$$

$\hookrightarrow$ la réciproque de la bijection $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction

$$\operatorname{argsh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

Graphe de l'argument sinus hyperbolique



Équation $\operatorname{ch} x = a \quad a \geq 1$

$$\operatorname{ch}(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad e^x + e^{-x} = 2a \quad \Leftrightarrow \quad (e^x)^2 - 2ae^x + 1 = 0$$

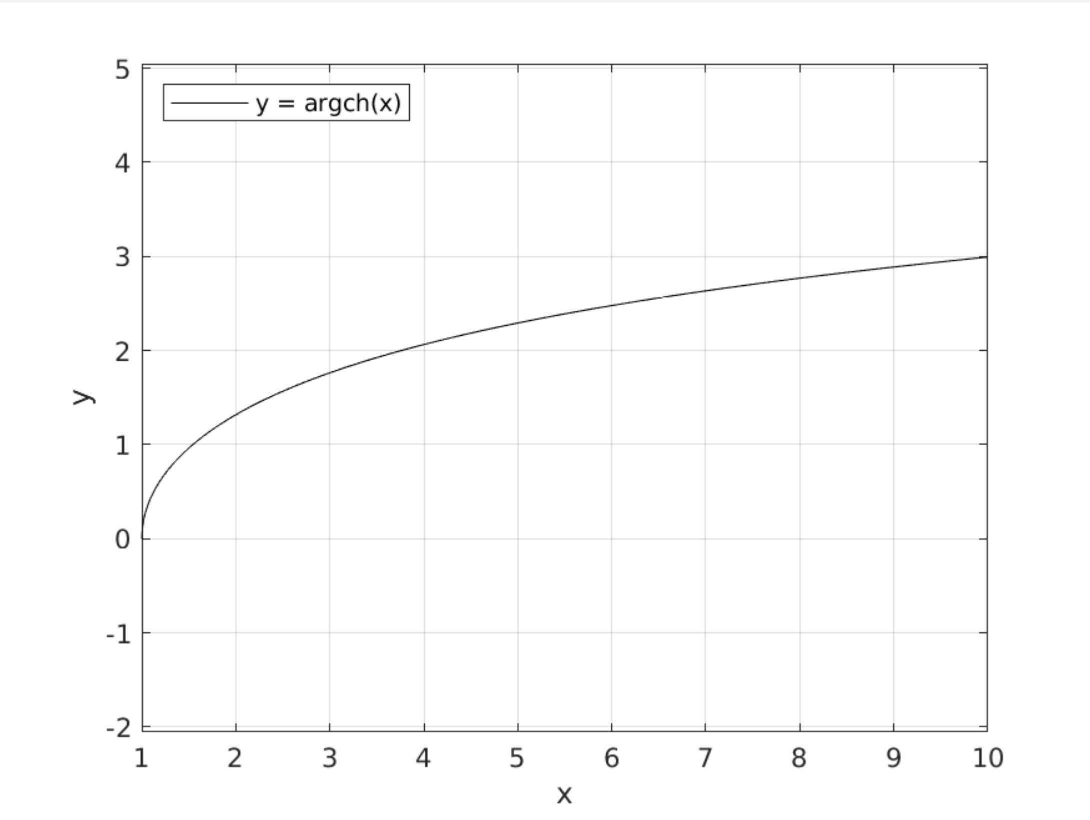
L'équation $X^2 - 2aX + 1 = 0$ a deux racines positives :
$u = a + \sqrt{a^2 - 1}$ et $v = a - \sqrt{a^2 - 1}$ qui vérifient : $uv = 1$

$$\operatorname{ch}(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm \ln\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right)$$

$\hookrightarrow$ la réciproque de la bijection $\operatorname{ch} : \mathbb{R}^+ \to [1, +\infty[$ est la fonction

$$\operatorname{argch}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

Graphe de l'argument cosinus hyperbolique



Équation $\mathrm{th}x = a \quad a \in]-1,1[$

$$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\mathrm{th}x = a \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2x} - 1 = a(e^{2x} + 1) \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2x} = \frac{1+a}{1-a}$$

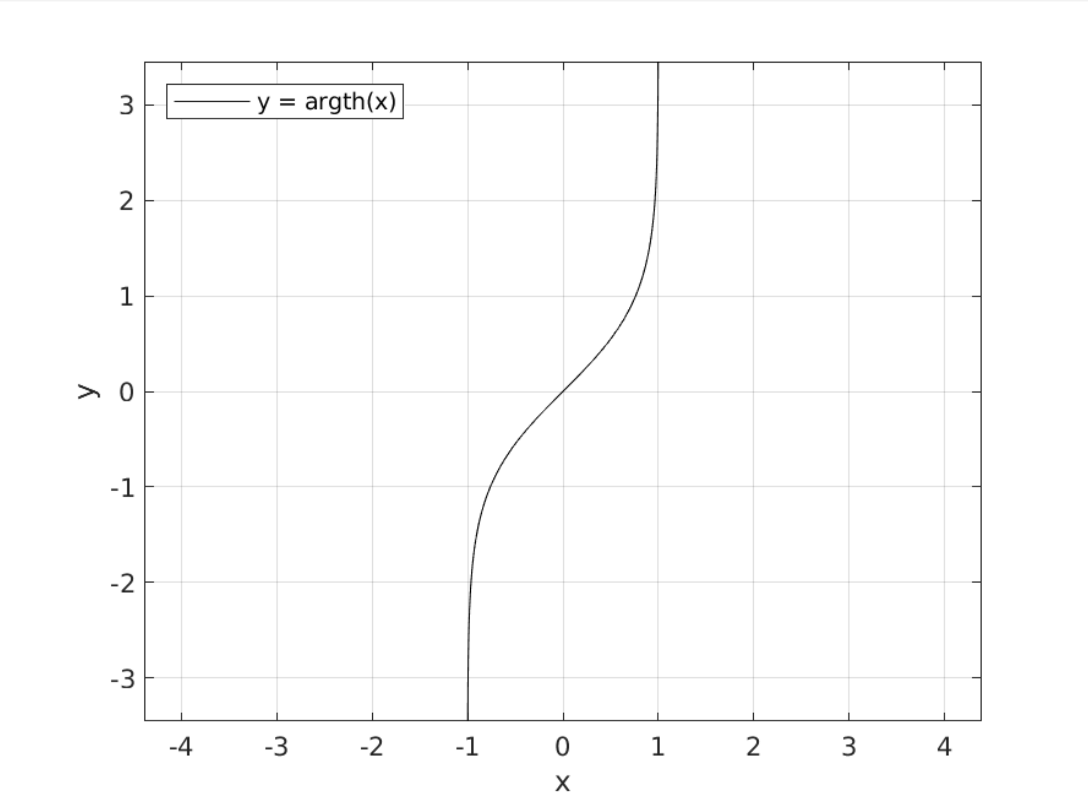
$\dfrac{1+a}{1-a} > 0$:

$$\mathrm{th}x = a \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right)$$

$\hookrightarrow$ la réciproque de la bijection $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ est la fonction

$$\mathrm{argth}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

Graphe de l'argument tangente hyperbolique



Exercice

1) Développer, pour $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\text{a)}\ \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y) \qquad \text{b)}\ \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) \qquad \text{c)}\ \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$$

2) En déduire les identités suivantes :

- $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\ \mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\ \mathrm{sh}(y)$
- $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\ \mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\ \mathrm{sh}(y)$

3) En déduire directement :

- $\mathrm{sh}(x-y) = \mathrm{sh}(x)\ \mathrm{ch}(y) - \mathrm{ch}(x)\ \mathrm{sh}(y)$
- $\mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\ \mathrm{ch}(x)$
- $\mathrm{ch}(x-y) = \mathrm{ch}(x)\ \mathrm{ch}(y) - \mathrm{sh}(x)\ \mathrm{sh}(y)$
- $1 = \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)$
- $\mathrm{ch}(2x) = 2\,\mathrm{ch}^2(x) - 1 = 1 + 2\,\mathrm{sh}^2(x)$

Exercice

Démontrer l'identité suivante pour $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{th}(x+y) = \frac{\mathrm{th}(x) + \mathrm{th}(y)}{1 + \mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}(y)}$$

puis en déduire directement :

$$\text{a)} \quad \mathrm{th}(x-y) = \frac{\mathrm{th}(x) - \mathrm{th}(y)}{1 - \mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}(y)}$$

$$\text{b)} \quad \mathrm{th}(2x) = \frac{2\,\mathrm{th}(x)}{1 + \mathrm{th}^2(x)}$$

Fonctions circulaires et hyperboliques sur $\mathbb{C}$ (hors programme)

On peut généraliser les définitions connues pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \ \sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

$$\mathrm{ch}(z) = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}, \ \mathrm{sh}(z) = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}.$$

On a alors immédiatement les identités :

$$\mathrm{ch}(iz) = \cos(z), \quad \mathrm{sh}(iz) = i\sin(z), \quad \mathrm{th}(iz) = i\tan(z).$$

Ces identités permettent de retrouver les identités hyperboliques à partir des identités circulaires (et réciproquement).

Fonctions circulaires et hyperboliques sur $\mathbb{C}$ (hors programme)

$$\mathrm{ch}(iz) = \cos(z), \quad \mathrm{sh}(iz) = i\sin(z), \quad \mathrm{th}(iz) = i\tan(z).$$

$$\begin{aligned}
& \cos^2(z)+\sin^2(z) = 1 \\
\Rightarrow \quad & \mathrm{ch}^2(iz) + \left(\frac{1}{i}\mathrm{sh}(iz)\right)^2 = 1 \\
\Rightarrow \quad & \mathrm{ch}^2(iz) - \mathrm{sh}^2(iz) = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(iz+iz') &= \cos(z+z') \\
&= \cos(z)\cos(z') - \sin(z)\sin(z') \\
&= \cos(z)\cos(z') + i^2\sin(z)\sin(z') \\
&= \mathrm{ch}(iz)\,\mathrm{ch}(iz') + \mathrm{sh}(iz)\,\mathrm{sh}(iz').
\end{aligned}$$

Développements limités

Introduction

Comment décrire précisément le comportement de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ au voisinage de $x = 0$?

f est continue en 0 donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f(0) = 1$

ce qui peut encore s'écrire $f(x) = 1 + \underset{x\to 0}{o}(1)$

f est dérivable en 0 ($f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$) donc $\dfrac{f(x)-1}{x} \to f'(0) = 1$

ce qui peut encore s'écrire $f(x) = 1 + x + o(x)$

Peut-on aller plus loin ?

Introduction

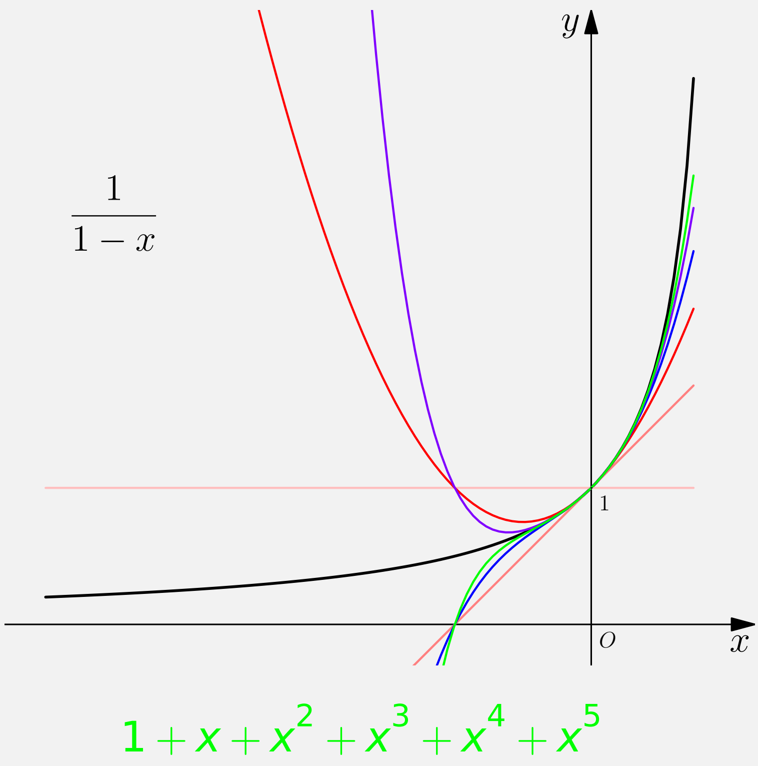
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Comme $x^{n+1} = o(x^n)$ et $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, on a donc

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1}{1-x} + o(x^n)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{1-x} = P_n(x) + o(x^n) \qquad \text{avec} \qquad P_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n.$$



Pour la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe donc un polynôme P_n tel que

$$f(x) = P_n(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^n).$$

P_n est une approximation (polynomiale) de f près de 0

Exemple : si $x = \frac{1}{10}$ et $n = 6$, $\left| f\left(\frac{1}{10}\right) - P_6\left(\frac{1}{10}\right) \right| \leq 10^{-6}$

Pour une fonction quelconque définie au voisinage de 0 :

- Existence de P_n ?
- Unicité de P_n ?
- Comment obtient-on P_n ?

Définition : Soit f une fonction définie au voisinage de 0 et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en 0 (noté DL_n) s'il existe un polynôme P_n, de degré au plus n, tel que

$$f(x) = P_n(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^n).$$

Si $a \in \mathbb{R}$, on définit de même un développement limité d'ordre n de f au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = Q_n(x-a) + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

En posant $x = a + h$, on se ramène à un DL_n en 0 :

$$f(a+h) = Q_n(h) + \underset{h \to 0}{o}(h^n).$$

Remarque : si $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ est un DL_n de f au voisinage de 0, alors on obtient un développement limité d'ordre $k \leq n$ par troncature de P_n (on supprime les termes de degré $> k$).

Autrement dit,

$$P_k(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k$$

est un DL_k de f au voisinage de 0.

Cette propriété est une simple conséquence de l'implication

$$p > k \quad \Rightarrow \quad x^p = \underset{x \to 0}{o}(x^k).$$

Proposition : Si une fonction f, définie sur un voisinage de 0, admet un développement limité d'ordre n en 0, ce développement est unique.

Supposons $f(x) = P_n(x) + o(x^n) = Q_n(x) + o(x^n)$

Notons $P_n(x) - Q_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.

Si $P_n - Q_n$ n'est pas le polynôme nul, il est équivalent en 0 à son terme de plus bas degré, du type $a_k x^k$ avec $0 \leq k \leq n$.

Comme par hypothèse, $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = o(x^n)$, on a $a_k x^k = o(x^n)$, ce qui contredit le fait que $k \leq n$.

Par conséquent, $P_n - Q_n$ est le polynôme nul.

Si f est dérivable en 0, alors $f(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$ avec $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$.

Comment obtient-on les coefficients suivants ?

Pour la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$, on a :

$$\begin{array}{lcl lcl}
f(x) & = & (1-x)^{-1} & f(0) & = & 1 \\
f'(x) & = & (1-x)^{-2} & f'(0) & = & 1 \\
f''(x) & = & 2(1-x)^{-3} & f''(0) & = & 2 \\
f^{(3)}(x) & = & 2\times 3(1-x)^{-4} & f^{(3)}(0) & = & 2\times 3 \\
f^{(4)}(x) & = & 2\times 3\times 4(1-x)^{-5} & f^{(4)}(0) & = & 2\times 3\times 4 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f^{(n)}(x) & = & 2\times\cdots\times n(1-x)^{-(n+1)} & f^{(n)}(0) & = & n!
\end{array}$$

$$P_n(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Définitions : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant 0 et $n \in \mathbb{N}$.

On appelle polynôme de Taylor d'ordre n de f en 0 le polynôme

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

On appelle reste de Taylor d'ordre n de f la fonction R_n définie par

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Formule de Taylor-Young : Soit $n \geq 1$, et f une fonction $n-1$ fois dérivable sur un voisinage de 0 et dont la dérivée n-ième existe en 0.

Alors f admet un DL_n en 0, et celui-ci est donné par le polynôme de Taylor d'ordre n de f en 0.
Autrement dit,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Preuve : Notons P_n le polynôme de Taylor de f en 0, et $R_n = f - P_n$ le reste. Montrons que $R_n = o(x^n)$ par récurrence sur n.

1. Pour $n = 1$:
$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) + o(1),$$
donc
$$f(x) - f(0) = xf'(0) + o(x)$$
et
$$R_1(x) = f(x) - f(0) - xf'(0) = o(x^1).$$

2. Supposons que le résultat soit vrai à l'ordre $n-1$
La fonction f' vérifie les hypothèses à l'ordre $n-1$ et le polynôme de Taylor de f' est la dérivée du polynôme de Taylor de f, car
$$\left(f(0) + \frac{f'(0)}{1!}X + \frac{f''(0)}{2!}X^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}X^n\right)'$$
$$= \quad f'(0) + \frac{(f')'(0)}{1!}X + \frac{(f')''(0)}{2!}X^2 + \cdots + \frac{(f')^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}X^{n-1}$$
Par hypothèse de récurrence (appliquée à f') on a donc
$$R_n'(x) = f'(x) - P_n'(x) = o(x^{n-1})$$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{R_n'(x)}{x^{n-1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad |x| \leq \alpha \Rightarrow \left|\frac{R_n'(x)}{x^{n-1}}\right| \leq \varepsilon$

Soit $x \in]0, \alpha]$, d'après le théorème des accroissements finis sur $[0, x]$ appliqué à $R_n(x)$ on a

$$\exists c \in]0, x[\quad \frac{R_n(x)}{x} = R_n'(c)$$

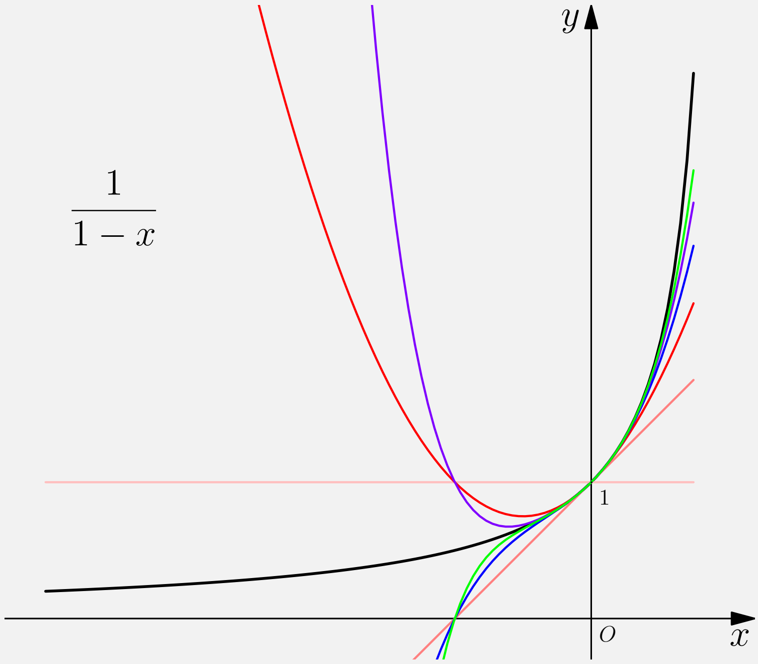
$$\text{donc} \quad \left|\frac{R_n(x)}{x^n}\right| = \left|\frac{R_n'(c)}{x^{n-1}}\right| \leq \left|\frac{R_n'(c)}{c^{n-1}}\right| \leq \varepsilon$$

Le raisonnement est le même si $x \in [-\alpha, 0[$.

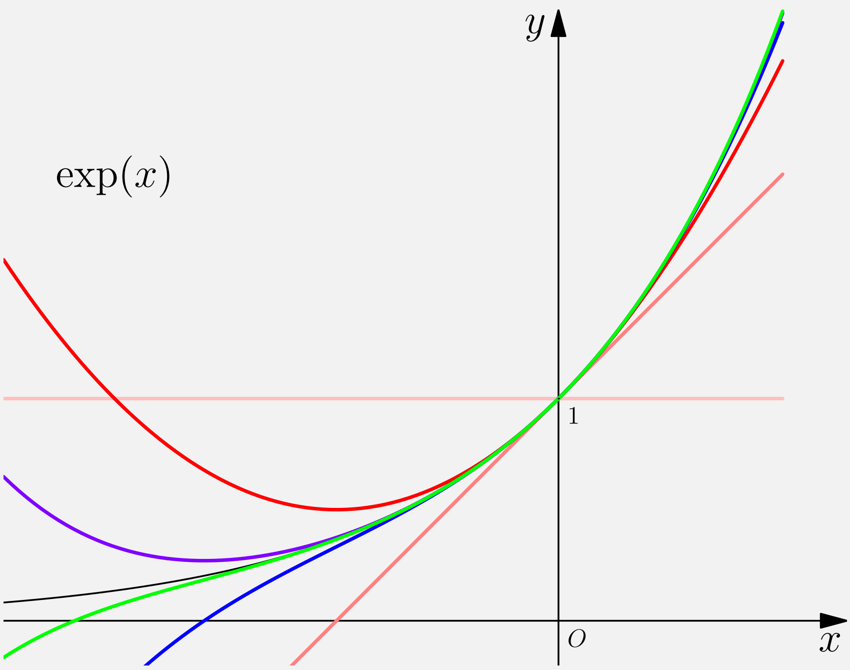
On a montré : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0, \quad |x| \leq \alpha \Rightarrow \left|\frac{R_n(x)}{x^n}\right| \leq \varepsilon$

c'est-à-dire $R_n(x) = o(x^n)$.

- $f(x) = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
- $f(x) = (1+x)^\alpha$
  $= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
- $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

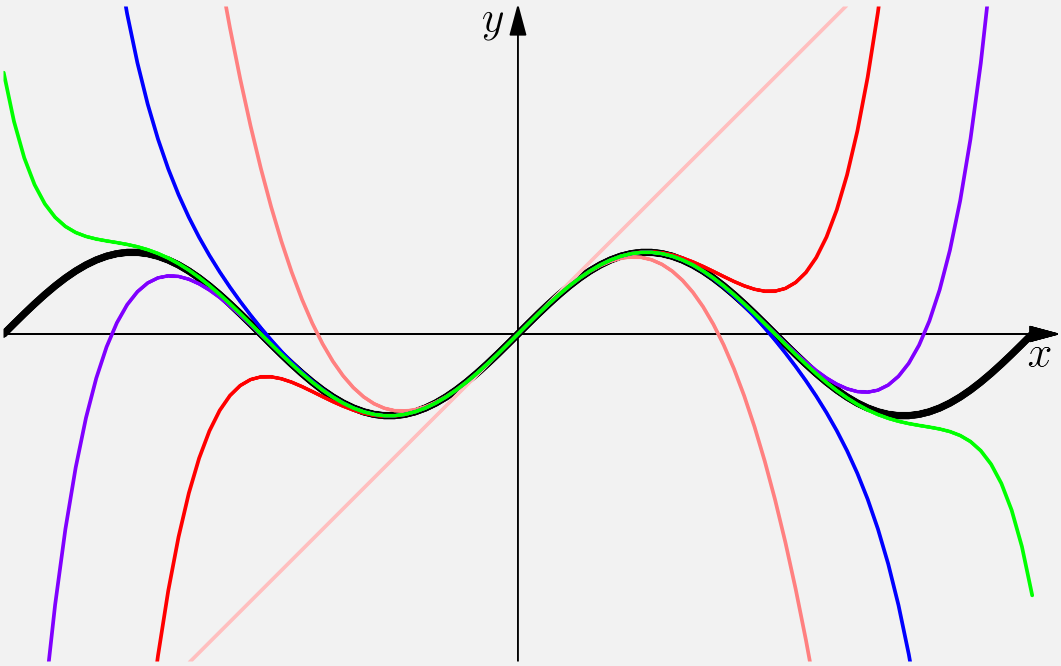


$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

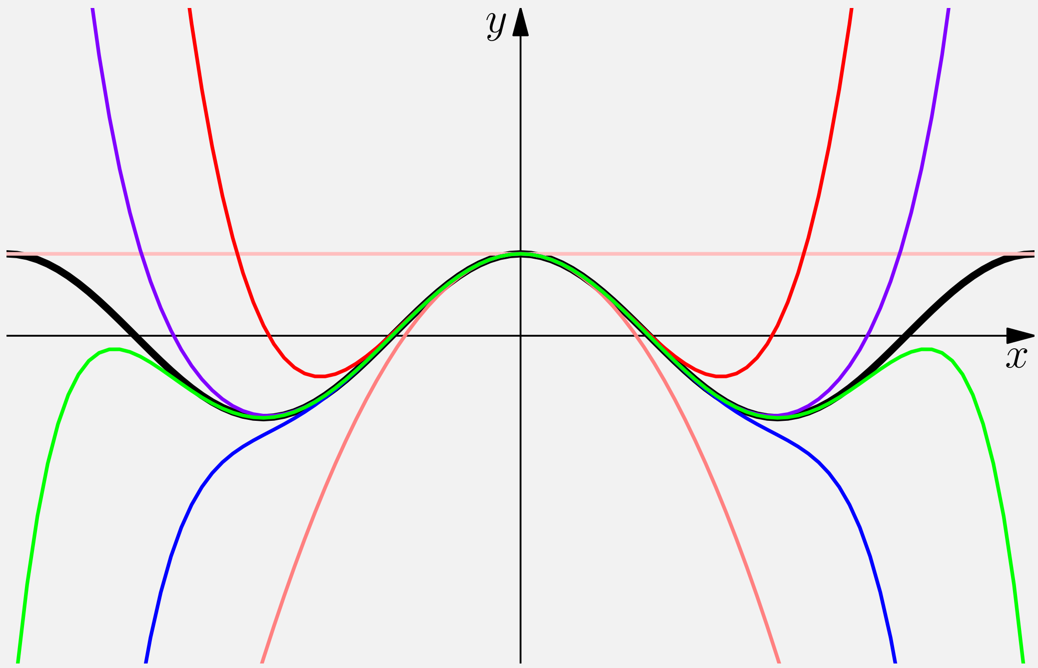


$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

- $f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$
- $f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$



$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + o(x^{11})$$



$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + o(x^{10})$$

Exercice : Pour $x = \frac{3}{10}$, comparer :

1. $\exp(x)$ et $\frac{x^0}{0!} + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ pour $n = 1, 2, 3, 4$
2. $\sin(x)$ et $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$ pour $p = 0, 1, 2$
3. $\cos(x)$ et $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}$ pour $p = 0, 1, 2$

Exercice : les DL pour calculer des limites

1. Donner un DL_2 de la fonction $\cos(x)$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

2. En déduire

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$$

Proposition :

- Si f admet un DL_n ($n \geq 0$), alors f est continue en 0
- Si f admet un DL_n ($n \geq 1$), alors f est dérivable en 0 et $f'(0)$ est le coefficient de x dans son développement limité
- Pour les dérivées d'ordre supérieur, on ne peut rien dire.

Opérations sur les développements limités

Théorème : Soit n un entier et I un intervalle contenant 0. Soit f et g deux fonctions définies sur I et admettant chacune un développement limité d'ordre n en 0 :

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \qquad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

Somme : $f + g$ admet un développement limité d'ordre n en 0 dont le polynôme de Taylor est la somme de ceux de f et g.

Produit : fg admet un développement limité d'ordre n en 0 dont le polynôme de Taylor est constitué des termes de degrés inférieurs ou égaux à n dans le produit $P_n Q_n$.

Composition : si $f(0) = 0$, $g \circ f$ admet un développement limité en 0, dont le polynôme de Taylor est constitué des termes de degrés inférieurs ou égaux à n dans le polynôme composé $Q_n \circ P_n$.

Lemme : Si φ est une fonction bornée au voisinage de 0 et $\psi(x) = o(x^n)$, alors $\varphi(x).\psi(x) = o(x^n)$.

Preuve :

- φ bornée sur un voisinage I de 0 $\quad \Rightarrow \quad \exists M, \forall x \in I, \quad |\varphi(x)| \leq M$
- $\psi(x) = o(x^n) \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\psi(x)}{x^n} = 0$
- $\dfrac{|\varphi(x)\psi(x)|}{|x^n|} \leq M \dfrac{|\psi(x)|}{|x^n|} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

Il suffit de montrer que les restes de Taylor de la somme, du produit et de la composition des fonctions sont négligeables devant x^n.

Produit :

$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \qquad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \big(P_n(x) + o(x^n)\big)\big(Q_n(x) + o(x^n)\big) \\ &= P_n(x)Q_n(x) + P_n(x)o(x^n) + Q_n(x)o(x^n) + o(x^n)o(x^n) \end{aligned}$$

P_n et Q_n sont bornées au voisinage de 0
$\Rightarrow \quad P_n(x)o(x^n) = o(x^n), \; Q_n(x)o(x^n) = o(x^n)$

$o(x^n)o(x^n) = o(x^{2n})$ est négligeable devant x^n

On a donc $f(x).g(x) = P_n(x).Q_n(x) + o(x^n)$,
et le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f.g$ est donc obtenu par troncature de $P_n.Q_n$, c'est-à-dire en conservant uniquement les termes de degré au plus n du polynôme $P_n.Q_n$.

Extension : $DL_n \times DL_p$

Soit f, g telles que $f(x) = x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ et $g(x) = 1 + 2x + 4x^2 + o(x^2)$. Donnons un DL d'ordre 3 de $f.g$.

$$\begin{aligned}
(fg)(x) &= x(1+2x+4x^2+o(x^2)) + x^2(1+2x+4x^2+o(x^2)) + \\
&\quad x^3(1+2x+4x^2+o(x^2)) + o(x^3).(1+2x+4x^2+o(x^2)) \\
&= x + 2x^2 + 4x^3 + o(x^3) + x^2 + 2x^3 + \underbrace{4x^4 + o(x^4)}_{=o(x^3)} + \\
&\quad x^3 + \underbrace{2x^4 + 4x^5 + o(x^5))}_{=o(x^3)} + \underbrace{o(x^3) + 2o(x^4) + 4o(x^5) + o(x^5))}_{=o(x^3)} \\
&= x + 3x^2 + 7x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Extension : $DL_n \circ DL_p$

Soit f, g telles que $f(x) = x + 2x^2 + o(x^2)$ et $g(x) = 1 + x^3 + o(x^3)$. Donnons un DL d'ordre 3 de $g \circ f$.

$$\begin{aligned}
g \circ f(x) &= g(f(x)) \\
&= 1 + (x + 2x^2 + o(x^2))^3 + o((x + 2x^2 + o(x^2))^3) \\
&= 1 + x^3 + 3 \times 2x^4 + \cdots + o(x^3 + 3 \times 2x^4 + \cdots) \\
&= 1 + x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

- $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$
- $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} e^x & = & 1 & + & x & + & \frac{x^2}{2!} & + & \frac{x^3}{3!} & + & \cdots & + & \frac{x^n}{n!} & +o(x^n) \\ e^{-x} & = & 1 & - & x & + & \frac{x^2}{2!} & - & \frac{x^3}{3!} & + & \cdots & + & \frac{(-1)^n x^n}{n!} & +o(x^n) \end{array}$$

Définition : Pour toute fonction $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ ($a > 0$ ou $a = \infty$), on appelle partie paire et partie impaire de f les fonctions $f_p :]-a, a[\to \mathbb{R}$ et $f_i :]-a, a[\to \mathbb{R}$ définies par :

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Propriétés :

- f_p est paire, f_i est impaire, et $f = f_p + f_i$.
- si f est une fonction polynomiale, f_p est obtenue en conservant uniquement les termes de degré pair dans f (et f_i avec les termes de degré impair)

Proposition : Si $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ admet P pour $\mathrm{DL}_n(0)$, alors f_p admet P_p pour $\mathrm{DL}_n(0)$ et f_i admet P_i pour $\mathrm{DL}_n(0)$.

Exemple : ch est la partie paire de exp, sh sa partie impaire, d'où les développements limités obtenus précédemment.

Théorème : Soit n un entier et I un intervalle contenant 0.

Soit f une fonction $n-1$ fois dérivable sur I et dont la dérivée n-ième existe en 0, et P_n son polynôme de Taylor en 0.

Toute primitive de f admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0, donné par la primitive de P_n qui prend la même valeur en 0.

Exemple : $f(x) = \frac{1}{1-x} = P_n(x) + o(x^n)$ avec $P(x) = 1 + x + \ldots + x^n$
$F(x) = -\ln(1-x)$ est une primitive de f, et $F(0) = 0$.
$Q(x) = x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est la primitive de P telle que $Q(0) = 0$.
donc $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \ldots - \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$.

- $\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$
- $\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$
- $\operatorname{Arctan} x = \int \frac{1}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+1})$
- $\operatorname{Arcsin} = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
  $= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2p} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+1})$

Quelques exemples

$\tan x$ à l'ordre 5 au voisinage de 0

On écrit $\tan x = \sin(x).\dfrac{1}{\cos(x)}$ et on fait un DL_5 des 2 termes :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = 1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$$

On pose $u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) = \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)$

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3), \quad u^2 = \frac{x^4}{4}\Big(1 + o(1)\Big), \quad u^3 = o(x^5)$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-u} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$$

$\tan x$ à l'ordre 5 au voisinage de 0

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5), \qquad \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\begin{aligned}
\tan x &= \sin(x).\frac{1}{\cos x}\\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right).\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right)\\
&= x\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right) - \frac{x^3}{6}\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) + \frac{x^5}{120}\left(1 + o(x)\right)\\
&= x + \frac{x^3}{2} + \frac{5x^5}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)
\end{aligned}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

$\ln\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4)$$

$$(1+x)^{\frac12} = 1 + \tfrac12 x - \tfrac18 x^2 + \tfrac1{16}x^3 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + o(x^4)$$

$$(1-x)^{\frac12} = 1 - \tfrac12 x - \tfrac18 x^2 - \tfrac1{16}x^3 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + o(x^4)$$

$$(1+x)^{\frac12} + (1-x)^{\frac12} = 2 - \tfrac14 x^2 - \tfrac{5}{2^6}x^4 + o(x^4)$$

$$\begin{aligned}
\ln\left((1+x)^{\frac12} + (1-x)^{\frac12}\right) &= \ln\left(2 - \tfrac14 x^2 - \tfrac{5}{2^6}x^4 + o(x^4)\right)\\
&= \ln\left(2(1 - \tfrac18 x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + o(x^4))\right)\\
&= \ln(2) + \ln\left(1 - \tfrac18 x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + o(x^4)\right)\\
&=
\end{aligned}$$

$$\ln(2) + (-\tfrac18 x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4) - \frac{(-\frac18 x^2 - \frac{5}{2^7}x^4)^2}{2} + \frac{(-\frac18 x^2 - \frac{5}{2^7}x^4)^3}{3} + \frac{(-\frac18 x^2 - \frac{5}{2^7}x^4)^4}{4} + o(x^4)$$

$$\begin{aligned}
&= \ln(2) + (-\tfrac18 x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4) - \tfrac{1}{2^7}x^4 + o(x^4)\\
&= \ln(2) - \tfrac18 x^2 - \tfrac{3}{2^6}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

On vient de montrer

$$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)=\ln(2)-\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2^6}x^4+o(x^4)$$

Application : Donner la limite, quand $x\to 0$, de

$$f(x)=\frac{8\ln\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}\right)+x^2}{1-\cos(x^2)}.$$

$\sqrt{1+x}\tan x$ ordre 3 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{1}{16}x^3+o(x^3)$$

$$\begin{aligned}\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}&=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\\&=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\\&=x+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{2}}\tan x&=\left(1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{1}{16}x^3+o(x^3)\right)\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\\&=x+\frac{x^3}{3}+\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{8}x^3+o(x^3)\\&=x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{5}{24}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

$\sqrt{1+x}\tan x$ ordre 3 au voisinage de 0

On vient de montrer :

$$\sqrt{1+x}\tan x = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^3 + o(x^3)$$

Application : Donner la limite, quand $x \to 0$, de

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}\tan x - \ln(1+x)}{(\sin(x))^2}.$$

$(1+x)^\alpha$ ordre n au voisinage de 1

Changement de variable : $x = 1+u$ u est au voisinage de 0.

$(1+x)^\alpha = (2+u)^\alpha = 2^\alpha\left(1+\frac{u}{2}\right)^\alpha$

$\left(1+\frac{u}{2}\right)^\alpha = 1 + \alpha\frac{u}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\left(\frac{u}{2}\right)^n + o(u^n)$

$u = x-1$

$(1+x)^\alpha = 2^\alpha\left(1+\alpha\frac{x-1}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n + o(x-1)^n\right)$

$=$

$2^\alpha\left(1+\frac{\alpha}{2}(x-1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{4.2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{2^n.n!}(x-1)^n + o(x-1)^n\right)$

$(1+x)^\alpha$ ordre n au voisinage de 1

On vient de montrer :

$$(1+x)^\alpha = 2^\alpha\Big(1 + \frac{\alpha}{2}(x-1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{4.2!}(x-1)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{2^n.n!}(x-1)^n + o(x-1)^n\Big)$$

Application : Donner la limite, quand $x \to 1$, de

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}(x-1)}{(\ln(x))^2}.$$

$\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ ordre 8 au voisinage de $+\infty$

Changement de variable : $u = \frac{1}{x}$ $\quad u > 0$ est au voisinage de 0.

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = u\sqrt{\frac{1}{u^2} - 1} = u\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}} = \sqrt{1-u^2}$$

$$(1-u^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{8}u^4 - \frac{1}{16}u^6 - \frac{5}{2^7}u^8 + o(u^8)$$

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} - \frac{1}{16x^6} - \frac{5}{2^7x^8} + o\left(\frac{1}{x^8}\right)$$

$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ ordre 8 au voisinage de $+\infty$

On vient de montrer :

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} - \frac{1}{16x^6} - \frac{5}{2^7x^8} + o\left(\frac{1}{x^8}\right)$$

Application : Donner la limite, quand $x \to +\infty$, de

$$f(x) = x^2\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - 1\right).$$

Exercice : $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ à l'ordre 5 en 0

- Soit $f(x) = 7 + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Calculer f'.
- Rappeler le DL d'ordre 2 de $(1+y)^{-1/2}$ en 0.
- En déduire le DL d'ordre 4 de f' en 0.
- En déduire le DL d'ordre 5 de f en 0.
- En déduire que $f(x) - 7 - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} e^x - 1 - x$.

Applications

Calcul de limites

Exercice : Donner les limites des fonctions suivantes en 0 :

1. $f(x) = \dfrac{e^x - 1 - x - x^2}{\ln(1+x) - x}$

2. $f(x) = \dfrac{\sin(x) - x}{x^2}$

3. $f(x) = \dfrac{\sin(x) - x}{x \ln(1 - x^2)}$

4. $f(x) = \dfrac{\sin(x) - \tan(x)}{\mathrm{th}(x) - \tan(x)}$

Exercice : Donner un développement asymptotique à 3 termes en $+\infty$ de $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Exercice : Montrer que le graphe de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}\exp\left(\sin\frac{1}{x}\right) - 2x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

admet une asymptote en $+\infty$ et étudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Exercice : On pose $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^6}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice : Montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution (notée x_n) dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$. Donner un développement asymptotique à 2 termes de x_n.

Exercice : Déterminer les réels a et b pour que

$$\cos(x) = \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2} + o(x^n)$$

avec n entier maximal.