Licence 1re année
Mathématiques et calcul
1er semestre

Quentin Denoyelle
quentin.denoyelle@u-paris.fr

(avec la collaboration de
A. Chambaz, L. Moisan et F. Benaych)

Université Paris Cité, campus Saint-Germain-des-Prés

3. Fonctions d'une variable réelle - continuité

4. Fonctions d'une variable réelle - dérivabilité

Fonctions d'une variable réelle

1. Introduction
2. Fonctions d'une variable réelle : généralités
   - Définition
   - Fonctions et opérations
   - Fonctions et ordre
   - Propriétés particulières
   - Monotonie
   - Limites
   - Unicité de la limite
   - Limites et opérations
   - Limites et ordre
   - Exercices
   - Formes indéterminées
   - Fonctions négligeables
   - Équivalence de fonctions
3. Fonctions d'une variable réelle, continuité
   - Définition
   - Opérations, composition et continuité
   - Prolongement par continuité
   - Fonctions croissantes
   - Image continue d'un intervalle
   - Continuité sur un intervalle fermé et borné
   - Fonctions monotones

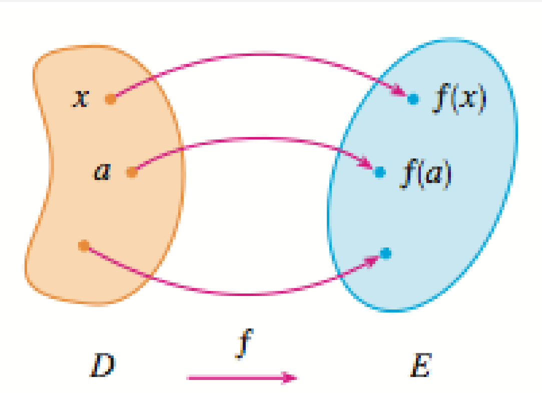
Fonction :

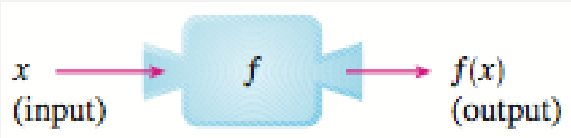
(1) machine à transformer des nombres en d'autres nombres

(2) modèle pour les évolutions temporelles

(3) courbes géométriques

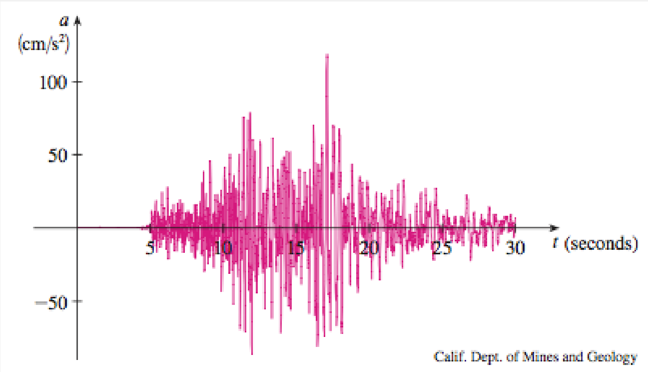
Fonction (1) : machine à transformer des nombres en d'autres nombres



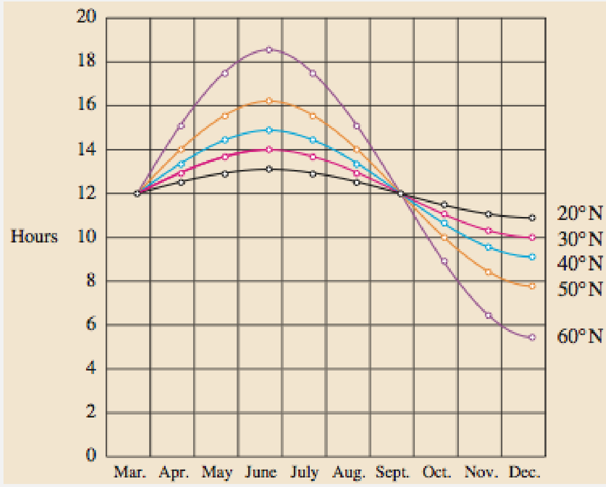


Exemple : fonction qui donne le prix $f(x)$ de l'envoi d'une lettre en fonction de son poids x en grammes.

Fonction (2) : modèle pour les évolutions temporelles

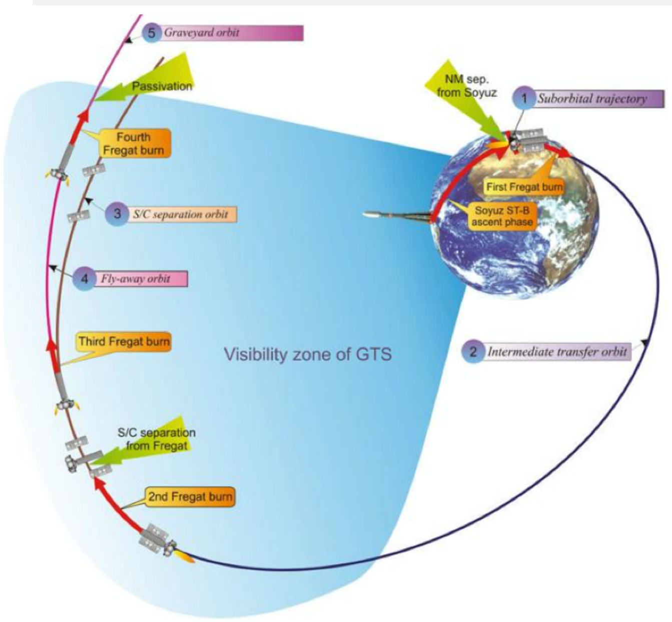


Accélération verticale en fonction du temps pendant le tremblement de terre de Los Angeles de 1994

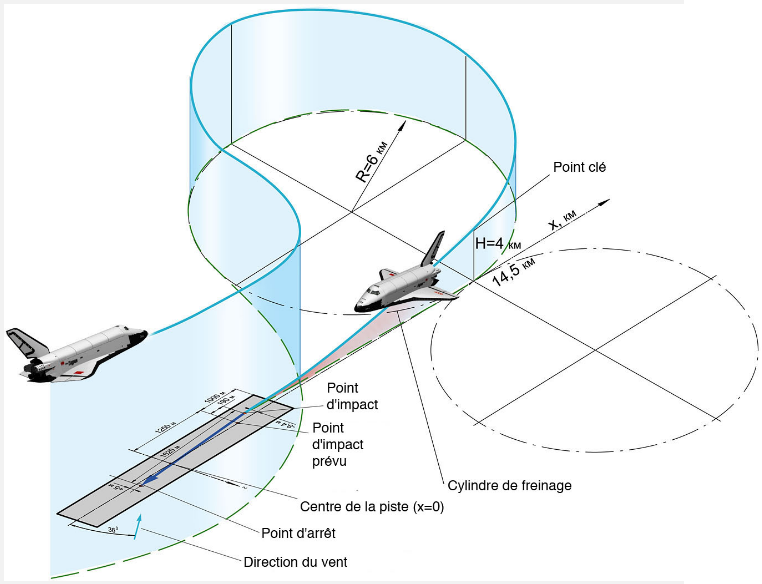


Heures d’ensoleillement/jour en fonction du mois, à diverses latitudes (Paris = 48.5° N, Marseille = 43.1° N)

Fonction (3) : courbes géométriques



Mise en orbite d’un satellite



Atterrissage

Fonction d'une variable réelle

Définition. Une fonction réelle, de variable réelle est une application d'une partie U de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On écrira :

$$U \subset \mathbb{R}, \qquad f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Remarque : U est souvent la plus grande partie de $\mathbb{R}$ où f est calculable (définie)

Exemples

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}$$

U est souvent appelé « le domaine de définition de f » : $\mathcal{D}_f$

$$U = \mathbb{R}_+, \qquad f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

Fonctions et opérations, composées

Somme et produit de fonctions

Soit f et g deux fonctions définies sur $U \subset \mathbb{R}$. On définit :

- la somme :

$$\begin{array}{rccl} f+g : & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array}$$

- le produit :

$$\begin{array}{rccl} f.g : & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f \times g(x) = f(x) \times g(x) \end{array}$$

Composée de fonctions

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que $f(U) \subset V$. On définit la composée de f et g :

$$g \circ f : x \longmapsto g(f(x))$$

Exemple : Si $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 1$, alors :

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f\big(g(x)\big) = f(x+1) = (x+1)^2 \\ g \circ f(x) &= g\big(f(x)\big) = g(x^2) = x^2 + 1 \end{aligned}$$

Fonctions et ordre

Comparaison des fonctions

Soit f et g deux fonctions définies sur $U \subset \mathbb{R}$

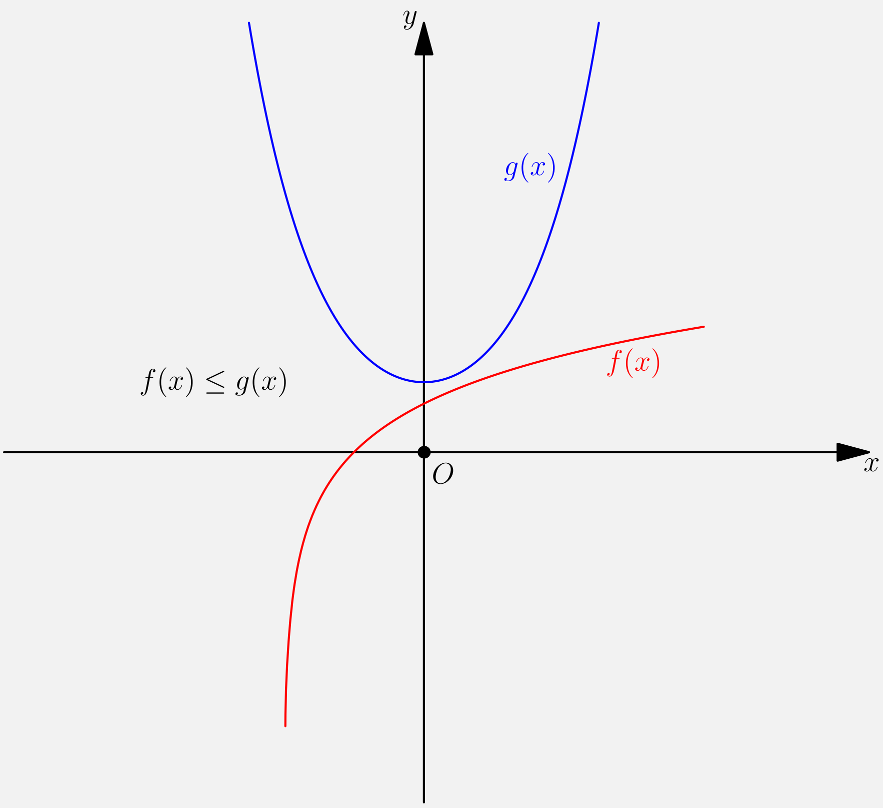
On dit que f est inférieure à g sur U si

$$\forall x \in U, \quad f(x) \leq g(x)$$

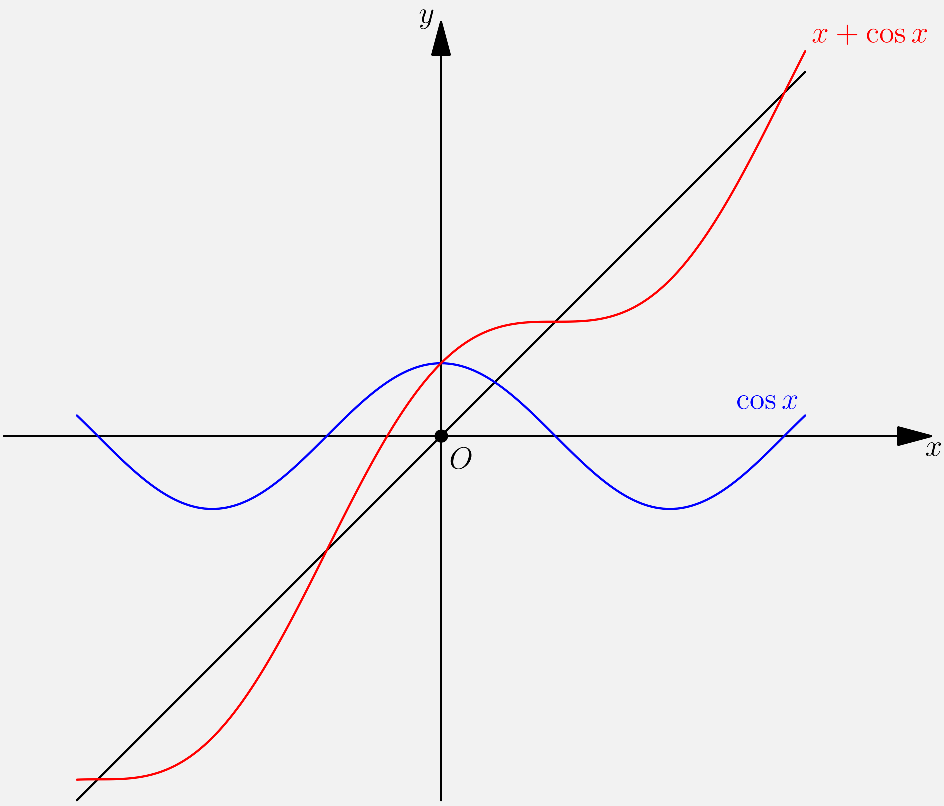
Notation : $f \leq g$

Remarque : deux fonctions ne sont pas toujours comparables

Deux fonctions comparables



Deux fonctions non comparables



Comparaison des fonctions

Exercice : Dans chacun des cas suivants, dire si $f \leq g$, si $g \leq f$ ou si aucun des deux n’est vrai :

1. $x \mapsto f(x) = x^2 + 1, \quad x \mapsto g(x) = \cos(x)$
2. $x \mapsto f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad x \mapsto g(x) = \sin(x)$
3. $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \mapsto g(x) = x^2 + 2x + 3$
4. $x \mapsto f(x) = \dfrac{4-x^2}{1+x^2}, \quad x \mapsto g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Propriétés particulières

Parité, imparité

Définition. Soit U une partie de $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in U, \quad -x \in U.$$

On dit qu'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est

- paire si : $\forall x \in U, \quad f(-x) = f(x)$
- impaire si : $\forall x \in U, \quad f(-x) = -f(x)$

Périodicité

Définition. Soit $T > 0$ et U une partie de $\mathbb{R}$ telle que

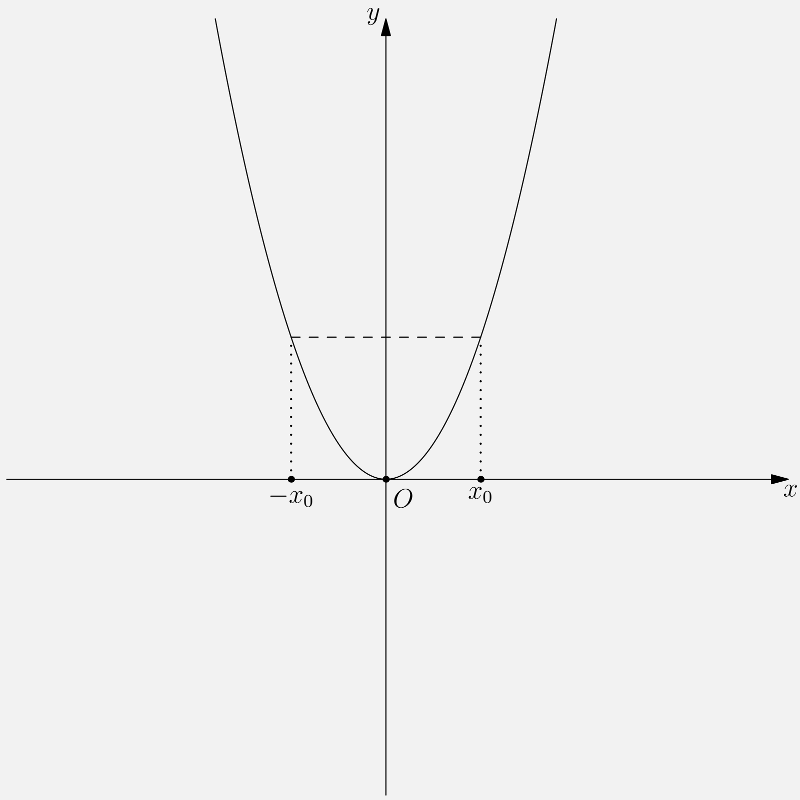
$$\forall x \in U, \quad x + T \in U.$$

On dit qu'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est T-périodique si

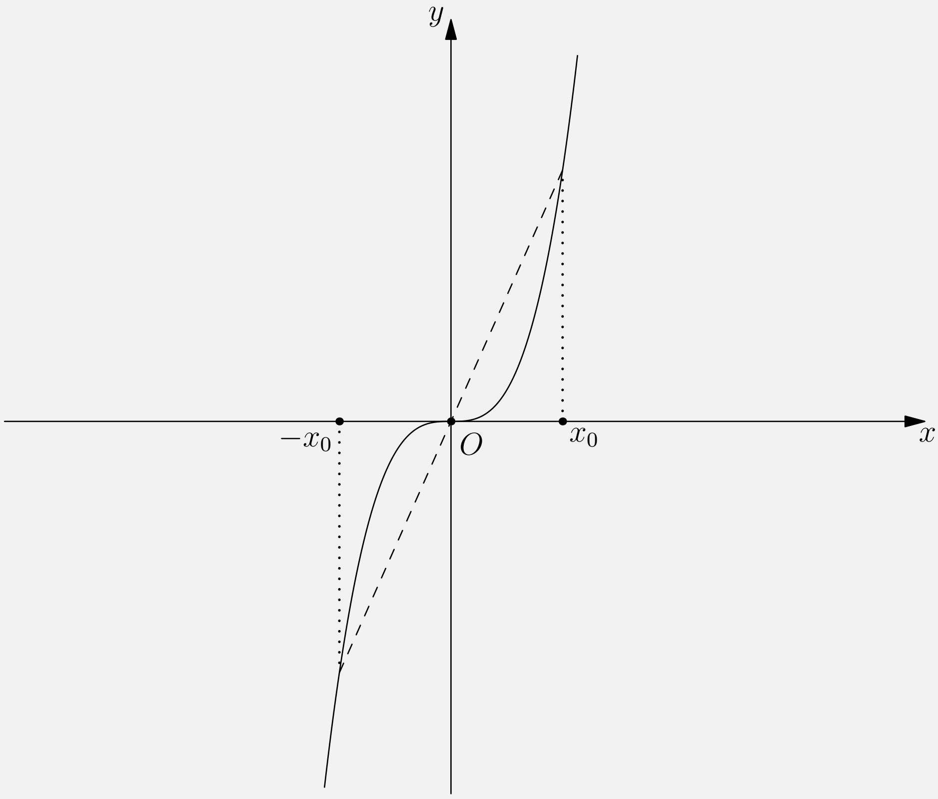
$$\forall x \in U, \ f(x+T) = f(x)$$

Fonctions d'une variable réelle
Propriétés particulières

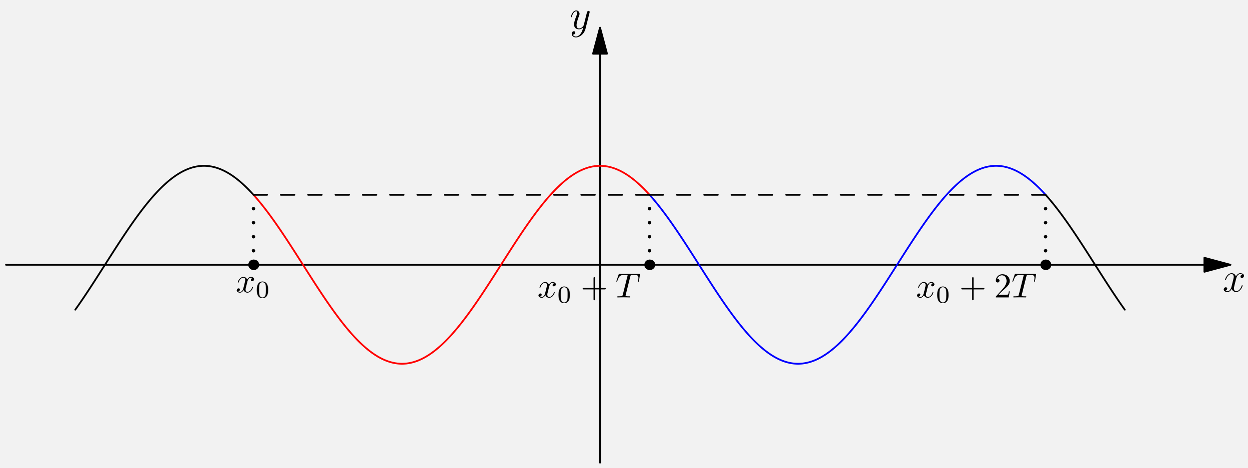
Fonction paire



Fonction impaire



Fonction périodique



Parité, imparité, périodicité

Exercice : Dans chacun des cas suivants, dire si f est paire, impaire, périodique :

1. $x \mapsto f(x) = x^2 + 1$
2. $x \mapsto f(x) = \sin(4x)$
3. $x \mapsto f(x) = x(x^4 - 3)$
4. $x \mapsto f(x) = \cos(x)$
5. $x \mapsto f(x) = x|x|$
6. $x \mapsto f(x) = \sin^2(3x)$
7. $x \mapsto f(x) = \sin^2(x + \frac{\pi}{3})$
8. $x \mapsto f(x) = \dfrac{4 - x^3}{1 + x^2}$

Monotonie

Fonctions croissantes et décroissantes

Soit f une fonction définie sur $U \subset \mathbb{R}$ et $V \subset U$, $\quad V \neq \emptyset$.

On dit que f est :

- croissante sur V si : $\forall x, y \in V, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- décroissante sur V si : $\forall x, y \in V, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- strictmt croissante sur V si : $\forall x, y \in V, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- strictmt décroissante sur V si $\forall x, y \in V, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Remarque utile : une fonction croissante préserve les inégalités, une fonction décroissante inverse les inégalités

Monotonie et opérations

Proposition : Soit f et g deux fonctions définies sur U :

- si f et g sont croissantes sur U, alors $f + g$ est croissante sur U
- si f et g sont croissantes sur U et si f et g sont positives sur U, alors $f \times g$ est croissante sur U
- si f et g sont toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes, si leur composée $f \circ g$ existe, alors $f \circ g$ est croissante
- si une des deux fonctions, f ou g, est croissante et l'autre décroissante et si leur composée existe, alors $f \circ g$ est décroissante

Limites finies

Limite en un point

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et x_0 un nombre réel qui appartient à I ou qui est une extrémité de I

Soit f une fonction définie sur I ou sur $I \setminus \{x_0\}$

Définition. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \setminus \{x_0\}, \quad |x - x_0| \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

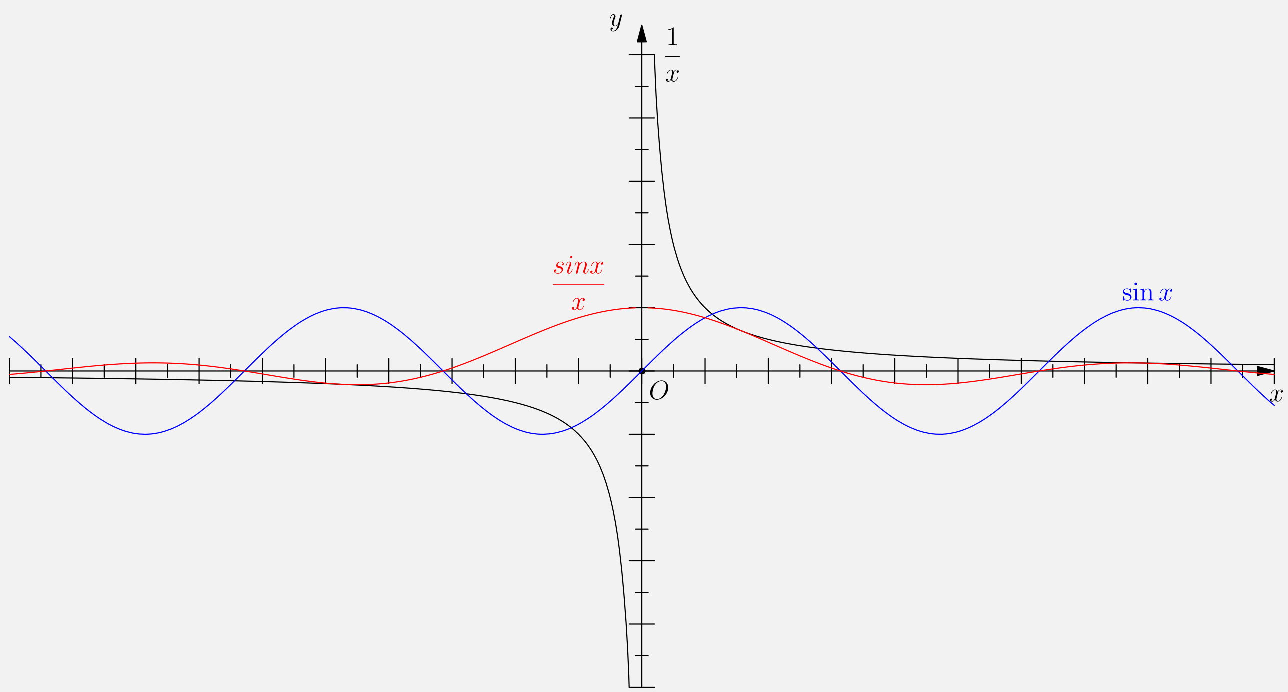
On note : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Remarque : La fonction f n'a pas besoin d'être définie en x_0 pour avoir une limite en x_0

Par exemple, f peut être définie sur un intervalle $I =]x_0\,, a[$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x} : \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

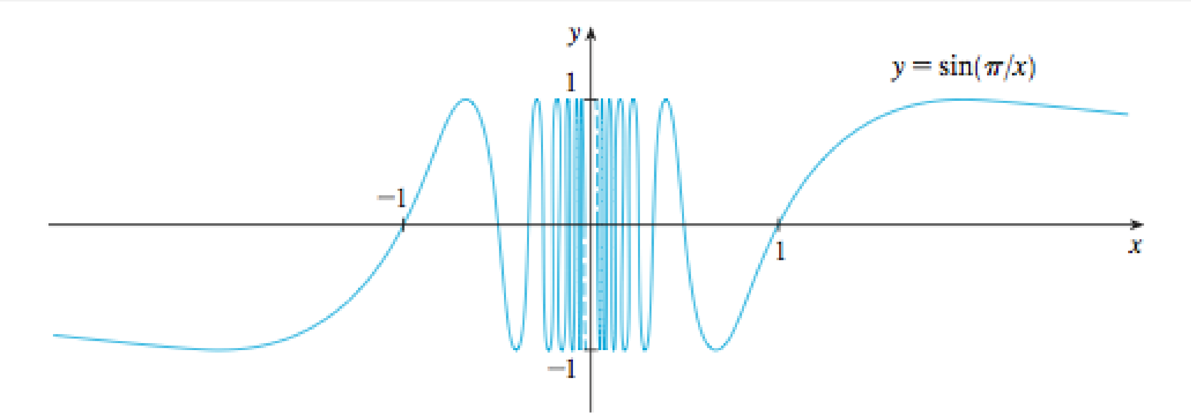
$$h(x) = \frac{\sin x}{x}$$



Exercice : Quelle semble-être, à la lecture de ce tableau, la limite de $\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$ lorsque $x \to 0$?

x	$\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$
±1.0	0.16228
±0.5	0.16553
±0.1	0.16662
±0.05	0.16666
±0.001	0.16667

La fonction suivante semble-t-elle avoir une limite en 0 ?



Exemple : $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

Soit $\varepsilon > 0$

On cherche $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$,

$$|x^2 - 0| \leq \varepsilon, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x^2 \leq \varepsilon$$

Si on choisit $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$, on a bien

$$\forall x \in [-\alpha, \alpha], \qquad |x^2 - 0| \leq \varepsilon$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien montré que

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

Exemple : $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$

Soit $\varepsilon > 0$

On cherche $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$, $|e^x - 1| \leq \varepsilon$,
soit $\quad -\varepsilon \leq e^x - 1 \leq \varepsilon, \quad$ ou encore $\quad 1 - \varepsilon \leq e^x \leq 1 + \varepsilon$

On a $e^x \leq 1 + \varepsilon \iff x \leq \ln(1+\varepsilon)$

et, si $1 - \varepsilon > 0$, $\qquad 1 - \varepsilon \leq e^x \iff \ln(1-\varepsilon) \leq x$

Donc

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon \leq e^x \leq 1 + \varepsilon \quad &\iff \quad \ln(1-\varepsilon) \leq x \leq \ln(1+\varepsilon) \\ &\Longleftarrow \quad |x| \leq \min\{\ln(1+\varepsilon), -\ln(1-\varepsilon)\} \end{aligned}$$

Donc si on choisit $\alpha = \min\{\ln(1+\varepsilon), -\ln(1-\varepsilon)\}$, on a bien

$$\forall x \in [-\alpha, \alpha], \qquad |e^x - 1| \leq \varepsilon$$

Conclusion : on a bien montré que $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$

Limite finie quand x tend vers $+\infty$

Soit I, l'un des intervalles : $]-\infty, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$

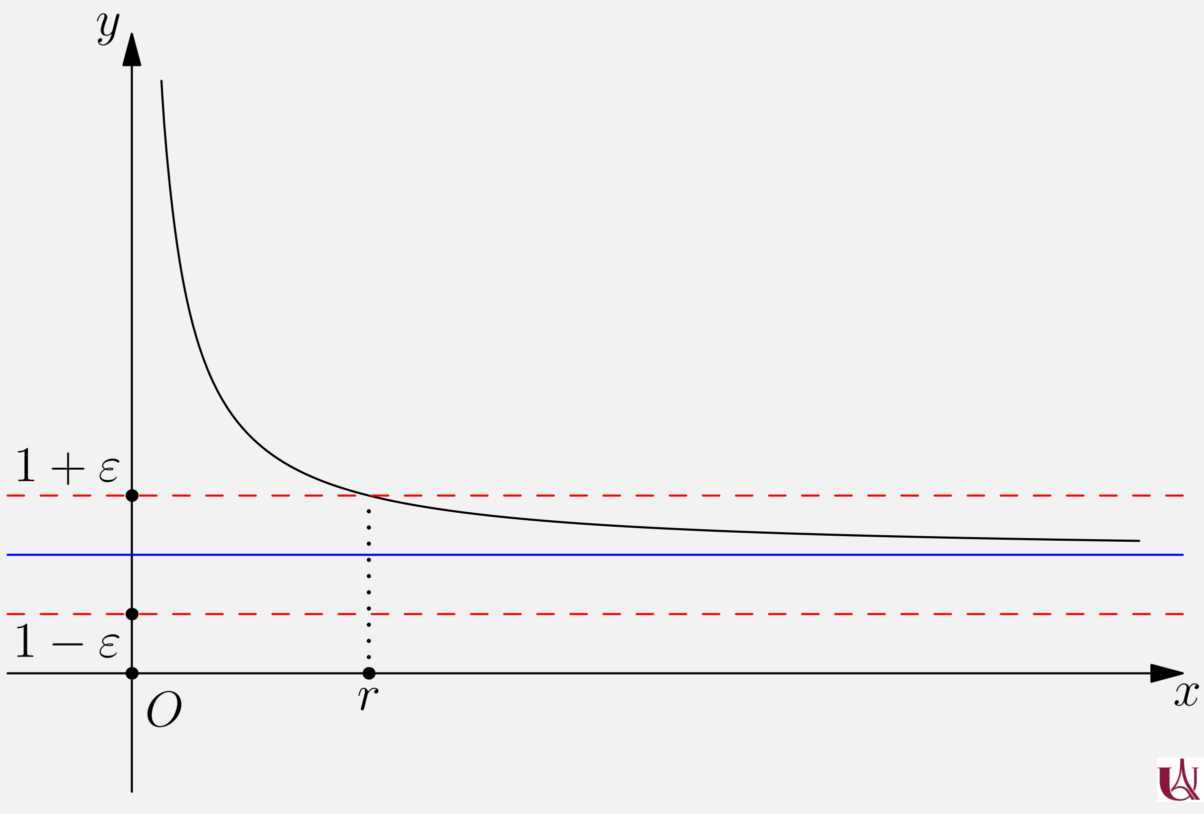
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$

Définition. On dit que f a pour limite ℓ quand x tend vers $+\infty$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists r \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \geq r \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Notation : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

Limite finie quand x tend vers $+\infty$



Exemple : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche r tel que pour tout $x \geq r$,

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| \leq \varepsilon, \qquad \text{c-à-d} \qquad |x| \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

Si on choisit $r = \frac{1}{\varepsilon}$, on a bien

$$\forall x \geq r, \qquad \left|\frac{1}{x} - 0\right| \leq \varepsilon$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien montré que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Exercice : Calculer $\lim_{x\to+\infty} x^{-2}$ (avec démonstration)

Limite finie quand x tend vers $-\infty$

Soit I, l'un des intervalles : $]-\infty, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, a]$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$

Définition On dit que f a pour limite ℓ quand x tend vers $-\infty$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists r \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \leq r \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Notation : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$

Exercice : démontrer que $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

Limites infinies

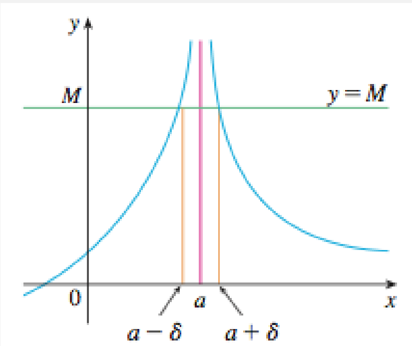
Limites infinies

La fonction tend vers $+\infty$ quand x tend vers a

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un nombre réel qui appartient à I ou qui est une extrémité de I, et f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$

Définition. On dit que f a pour limite $+\infty$ en a si

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I \setminus \{a\}, \quad |x - a| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq M$$



On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

Exemple : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Soit $A > 0$

On cherche $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$, $x \neq 0$,

$$\frac{1}{x^2} \geq A, \qquad \text{c-à-d} \qquad |x| \leq \frac{1}{\sqrt{A}}$$

Si on choisit $\alpha = \frac{1}{\sqrt{A}}$, on a bien

$$\forall x \in [-\alpha, \alpha],\ x \neq 0, \qquad \frac{1}{x^2} \geq A$$

Ceci étant valable pour tout $A > 0$ (donc a fortiori pour tout A réel), on a bien montré que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Limites infinies

La fonction tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

Soit I l'un des intervalles $]-\infty, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$.

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$

On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, si

$$\forall A,\ \exists r > 0,\ \forall x \in I, \quad x \geq r \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq A$$

Notation : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Exemple : $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

Soit $A > 0$: on cherche $r > 0$ tel que pour tout $x \geq r$,

$$x^2 \geq A, \qquad \text{c-à-d} \qquad x \geq \sqrt{A}$$

Si on choisit $r = \sqrt{A}$, on a bien

$$\forall x \geq r, \qquad x^2 \geq A$$

Ceci étant valable pour tout $A \in \mathbb{R}$, on a bien montré que

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

Exercice : Démontrer que $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Limites infinies

La fonction tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$

Soit I l'un des intervalles $]-\infty, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, a]$

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$

On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, si

$$\forall A,\ \exists r,\ \forall x \in I, \quad x \leq r \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq A$$

Notation : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Limites infinies

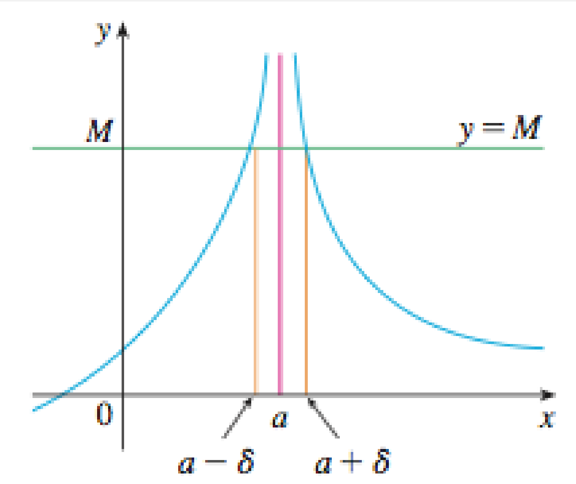
La fonction tend vers $-\infty$ ...

On dit que f tend vers $-\infty$

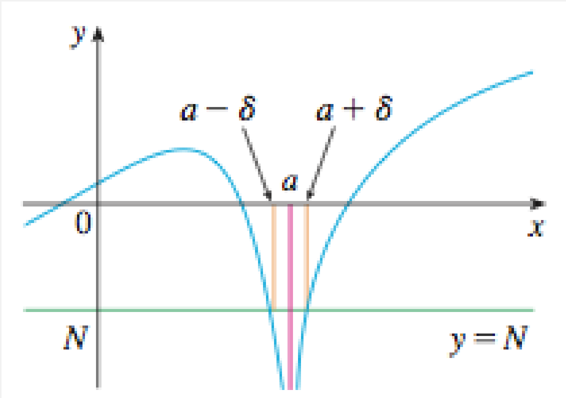
1. quand x tend vers x_0
2. quand x tend vers $+\infty$
3. quand x tend vers $-\infty$

si : $(-f)$ tend vers $+\infty$

1. quand x tend vers x_0
2. quand x tend vers $+\infty$
3. quand x tend vers $-\infty$



$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$:
$\forall M, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap [a-\delta, a+\delta]$, $f(x) > M$.



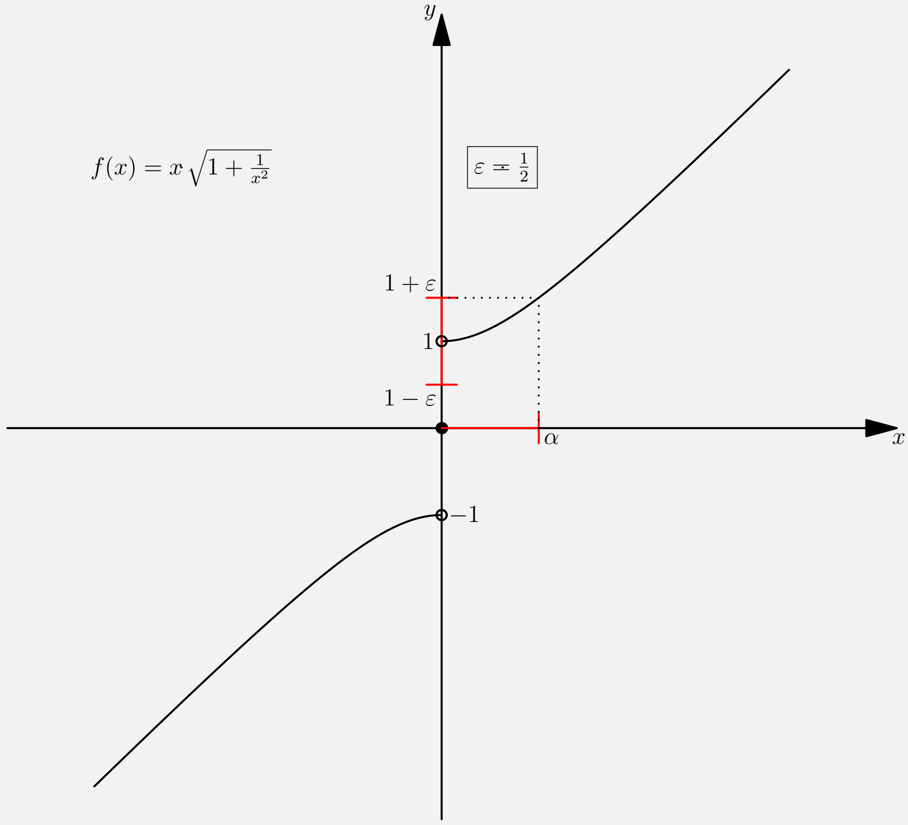
$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$:
$\forall N, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap [a-\delta, a+\delta]$, $f(x) < N$.

Limites à gauche et à droite

Soit $I =]a, b[$ un intervalle, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur la réunion $]a, x_0[\cup]x_0, b[$

- si
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$$
on dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à gauche
Notation : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$
- si
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$$
on dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à droite
Notation : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$

Exercice : Donner $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|}$ et $\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|}$



Notations 0^+, 0^-, ℓ^+, ℓ^-

Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, pour $a = x_0$ ou $a = x_0^{\pm}$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$

On note
$$\lim_{x\to a} f(x) = 0^{+}$$
si pour x dans un voisinage de a, $f(x) > 0$

On note
$$\lim_{x\to a} f(x) = 0^{-}$$
si pour x dans un voisinage de a, $f(x) < 0$

Plus généralement, si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, on note
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell^{+} \text{ (ou } \ell^{-}\text{)}$$
si pour x dans un voisinage de a, $f(x) > \ell$ (ou $f(x) < \ell$)

Exercice : Vrai ou faux ?

1. $\lim_{x\to 0^{+}} x^2 = 0^{+}$
2. $\lim_{x\to 0^{-}} x^2 = 0^{-}$
3. $\lim_{x\to 0^{+}} x^3 = 0^{-}$
4. $\lim_{x\to 0^{-}} x^3 = 0^{-}$
5. $\lim_{x\to 0^{+}} \sin(x) = 0^{+}$
6. $\lim_{x\to 0^{-}} \sin(x) = 0^{-}$
7. $\lim_{x\to 0^{+}} \cos(x) = 1^{-}$
8. $\lim_{x\to 0^{-}} \cos(x) = 1^{+}$

Unicité de la limite

Proposition : Si une fonction f a une limite (en un point, en $+\infty$ ou en $-\infty$), alors cette limite est unique

Limites et opérations

Les limites des fonctions sont compatibles avec les opérations classiques (sommes, différences, produits, quotients, composées,...).

En particulier,

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0^+ \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

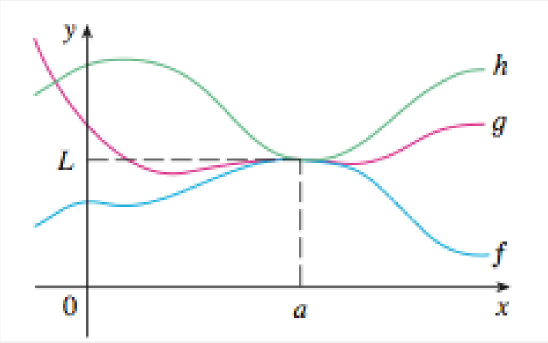
et

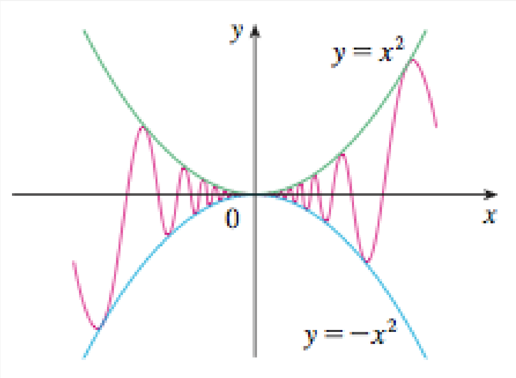
$$\lim_{x \to a} f(x) = 0^- \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

Limites et ordre

Les résultats de comparaison (théorèmes d’encadrement, etc.) valables pour les suites sont valables pour les fonctions.

« Théorème des gendarmes »





Exercice : Que valent les limites suivantes ?

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x) x^2$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} + \cos(x) x^3$

Exercice : Que valent les limites suivantes ?

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(x) + x^2$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 + \cos(x)) x^4$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} (2 + \cos(x)) x^3$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$

« Théorème des gendarmes »

Corollaire. Soit f et g deux fonctions :

si f est bornée et si $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \to x_0} f(x) \times g(x) = 0$

Limites et comparaisons : exemple

Corollaire. Si $f \leq g$ et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

Exercice : Que valent les limites suivantes ?

1. $\lim_{x \to +\infty} x^2 + \dfrac{\sin(x)}{2}$

2. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} - \sin(\pi/x)$

3. $\lim_{x \to +\infty} e^{x+\cos(\pi/3+x)}$

4. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sin(1/x)} + \cos(x)$

Exercice : Que valent les limites suivantes ?

1. $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$
2. $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$
3. $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{|x|}}$
4. $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{|x|}}$
5. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+3|x|}{x}$
6. $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+3|x|}{x}$
7. $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+x^{-1}} - \sqrt{x^{-1}}$

Formes indéterminées

Formes indéterminées

On n'a pas de critère pour

- $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)-g(x)\big)$ quand $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ $(\infty-\infty)$
- $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\times g(x)\big)$ quand $\lim_{x\to x_0} f(x)=0,\ \lim_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ $(0.\infty)$
- $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ quand $\lim_{x\to x_0} f(x)=0,\ \lim_{x\to x_0} g(x)=0$ $(\frac{0}{0})$
- $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ quand $\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty,\ \lim_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ $(\frac{\infty}{\infty})$
- $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\big)^{g(x)}$ quand $\lim_{x\to x_0} f(x)=1,\ \lim_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ (1^{∞})
- $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\big)^{g(x)}$ quand $\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty,\ \lim_{x\to x_0} g(x)=0$ (∞^{0})

Limites de polynômes lorsque $x\to\pm\infty$

Soit

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

$(n\geq 1,\ a_n\neq 0)$

- $\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_nx^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n>0\\ -\infty & \text{si } a_n<0\end{cases}$
- $\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} a_nx^n = \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} P(x) & \text{si } n \text{ pair}\\ -\lim_{x\to+\infty} P(x) & \text{si } n \text{ impair}\end{cases}$

Limites de fractions rationnelles lorsque $x \longrightarrow +\infty$

Soit

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad (n \geq 1,\ a_n \neq 0) \\ Q(x) &= b_p x^p + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \qquad (p \geq 1,\ b_p \neq 0) \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < p \\ \frac{a_n}{b_p} & \text{si } n = p \\ +\infty & \text{si } n > p \text{ et } \frac{a_n}{b_p} > 0 \\ -\infty & \text{si } n > p \text{ et } \frac{a_n}{b_p} < 0 \end{cases}$$

Limites de fractions rationnelles lorsque $x \longrightarrow -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p} =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } n < p \\ \frac{a_n}{b_p} & \text{si } n = p \\ +\infty & \text{si } n > p,\ n-p \text{ pair et } \frac{a_n}{b_p} > 0 \\ +\infty & \text{si } n > p,\ n-p \text{ impair et } \frac{a_n}{b_p} < 0 \\ -\infty & \text{si } n > p,\ n-p \text{ pair et } \frac{a_n}{b_p} < 0 \\ -\infty & \text{si } n > p,\ n-p \text{ impair et } \frac{a_n}{b_p} > 0 \end{cases}$$

Croissance comparée

Croissance comparée

Pour $a > 0$, $b > 0$, on a

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^a |\ln(x)|^b = \lim\limits_{x \to 0^+} x^a (\ln(x))^b = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{ax}}{x^b} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^b e^{ax} = 0$

Fonctions négligeables

Définition. Soit $a \in \mathbb{R}$, et deux fonctions f et g définies sur un voisinage I de a. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a, ce que l'on note $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

Comme pour les suites, on utilise souvent la caractérisation suivante :

Proposition. Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage I de a, et telles que g ne s'annule pas sur I. Alors

$$f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$$

On a une définition et une caractérisation similaires lorsque :

- I est un voisinage à droite de a :

$$f(x) = \underset{x \to a^+}{o}(g(x)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} 0$$

  et de même à gauche de a ($x \to a^-$)

- $a = +\infty$ et I est de la forme $]A, +\infty[$:

$$f(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(g(x)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

  et de même en $-\infty$ ($x \to -\infty$)

Exemples :

$$x^2 = \underset{x \to 0}{o}(x), \qquad x = \underset{x \to 0^+}{o}(\sqrt{x}),$$
$$x = \underset{x \to +\infty}{o}(x^2), \quad \sqrt{x} = \underset{x \to +\infty}{o}(x)$$

Croissance comparée

On peut ainsi reformuler les relations de croissances comparées avec des $o()$:

si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, alors

$$(\ln x)^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\beta) \qquad \text{et} \qquad x^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}(e^{\gamma x})$$

Par manipulations algébriques et changement de variable ($y = \frac{1}{x}$, $y = -x$, etc.) on peut retrouver d'autres relations classiques de croissance comparée :

$$|\ln x|^\alpha = \underset{x\to 0^+}{o}\left(\frac{1}{x^\beta}\right), \qquad e^{-\gamma x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^\beta}\right), \qquad \text{etc.}$$

Équivalence de fonctions

Définition. On dit que deux fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de a ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, ou de la forme r^+ ou r^- pour un réel r), ce que l'on note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, si

$$f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x))$$

Remarque : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$

Proposition. Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a, telles que g ne s'annule pas. Alors

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \qquad \iff \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$$

Preuve :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x)) \iff \frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \underset{x\to a}{o}(1).$$

Manipulation des $o()$ et des équivalents

Toutes les règles de manipulation des $o()$ et des équivalents, vues pour les suites, s'appliquent aussi pour les fonctions.

Exercice :
Donner un équivalent, le plus simple possible, des fonctions suivantes aux points spécifiés :

1. $x \mapsto f_1(x) = x + x^2 + x^3$ en $x = +\infty$, puis en $x = 0$
2. $x \mapsto f_2(x) = \sin x + \cos x$ en $x = 0$, puis en $x = \frac{\pi}{2}$
3. $x \mapsto f_3(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ en $x = +\infty$
4. $x \mapsto f_4(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\ln(x^2+1)}$ en $x = +\infty$, puis en $x = 0$.

Exercice

Exercice : Trouver, si elle existe, la limite quand $x \to 0^+$ de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{x^2 \ln x}{e^{-\frac{1}{x}} + x \cos x} + \frac{x + \sqrt{x|\ln x|}}{1 + \sqrt{|\ln x|}} \right)$$

1) On a $e^{-y} = \underset{y \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{y}\right)$ donc $e^{-\frac{1}{x}} = \underset{x \to 0^+}{o}(x)$

$$\text{et} \quad e^{-\frac{1}{x}} + x \cos x = o(x) + x(1 + o(1)) \underset{x \to 0^+}{\sim} x$$

$$\text{donc} \quad \frac{x^2 \ln x}{e^{-\frac{1}{x}} + x \cos(x)} \underset{x \to 0^+}{\sim} x \ln x$$

Exercice (suite)

2) De plus,

$$\frac{x+\sqrt{x|\ln x|}}{1+\sqrt{|\ln x|}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{x|\ln x|}}{\sqrt{|\ln x|}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{x}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{x^2\ln x}{e^{-\frac{1}{x}}+x\cos x} + \frac{x+\sqrt{x|\ln x|}}{1+\sqrt{|\ln x|}}\right) \\ &= \frac{x\ln x + \underset{x\to 0^+}{o}(x\ln x) + \sqrt{x} + \underset{x\to 0^+}{o}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}+\underset{x\to 0^+}{o}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1 + \underset{x\to 0^+}{o}(1) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

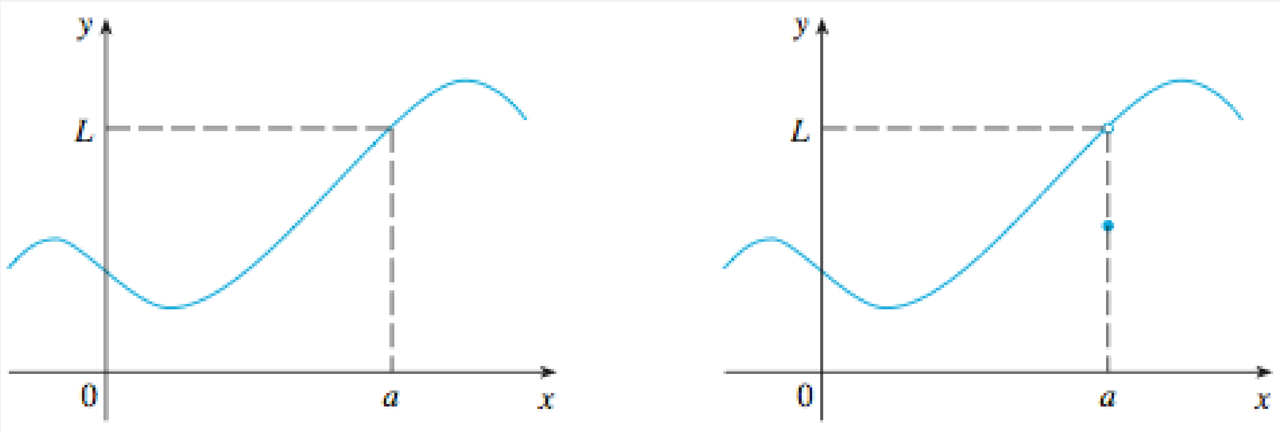
Exercices

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+2}{x^2\ln(x)}$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x\ln(x)+\sqrt{x}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+4x-1}{x\ln(x)}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x-e^{x^2}}{x^2-x}$

Exercices

1. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-x\right)$ et $\lim_{x\to+\infty}\exp\left(\sqrt{x}-x\right)$
2. $\lim_{x\to+\infty}\left(2\ln(x+1)-\ln(x^2+1)\right)$
3. $\lim_{x\to0^+}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x\to0^-}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$
4. $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{1-e^x}$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{1+e^x}{1-e^x}$
5. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln x}$

Continuité



Gauche : f est continue en a Droite : f est non continue en a

Fonction continue

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur A

- pour $a \in A$, on dit que *f est continue en a* si
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$
c-à-d si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que
$$(x \in A \quad \text{et} \quad |x - a| \leq \alpha) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$
- on dit que *f est continue sur A* si f est continue en tout point de A

Exercice : Les fonctions suivantes sont-elles continues ?

1. la fonction f qui à un instant t associe la température en haut de la tour Eiffel à l'instant t

2. la fonction partie entière de x, notée $x \mapsto E(x)$ [rappel : $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x : $E(5,43) = 5$, $E(4) = 4$, $E(-1,7) = -2 \dots$]

3. la fonction $x \mapsto f(x) = E(x)\sin(\pi x)$

4. la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, \text{pgcd(p, q)} = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(réponse : f est continue sur $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$, discontinue sur $[0,1] \cap \mathbb{Q}$)

Les sommes, différences, produits, quotients et composées de fonctions continues sont continues

De plus, toutes les fonctions usuelles sont continues là où elles sont définies

Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ si et seulement si pour tout suite (u_n) d'éléménts de I,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(a)$$

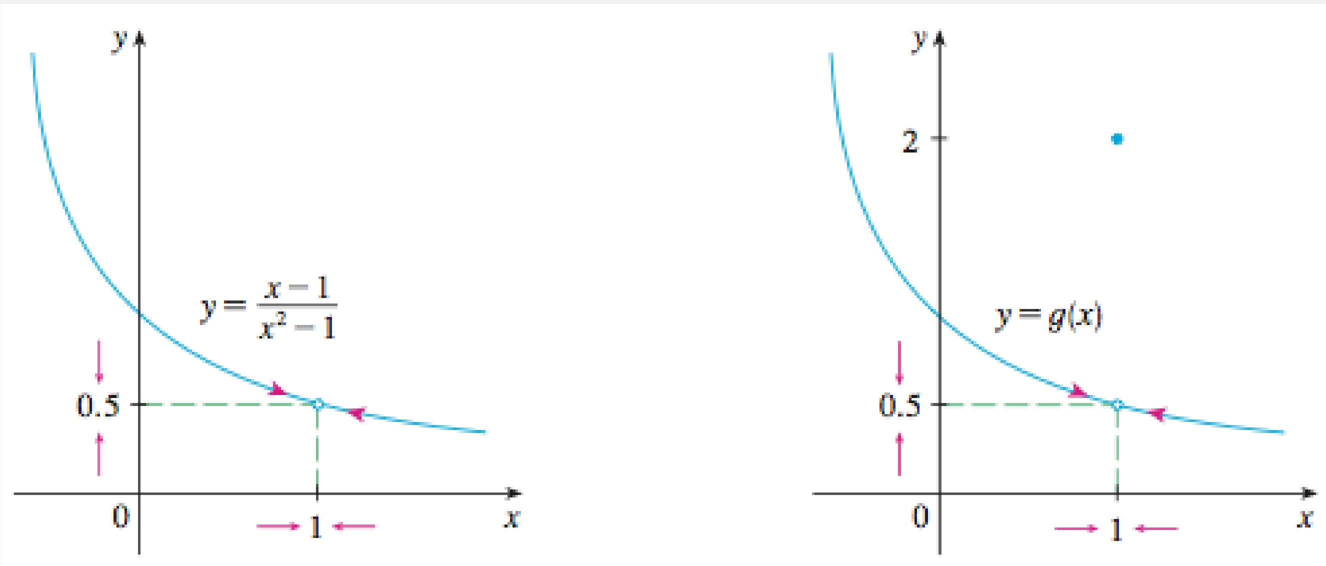
Corollaire. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et (u_n) une suite définie $u_0 \in \mathbb{R}$ et la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Si (u_n) converge vers un réel $L \in I$
2. et si f est continue en L,

alors L vérifie $f(L) = L$

Prolongement par continuité : exemple



Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur $]a,b[$ et ℓ un nombre réel

Supposons que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

On définit la fonction g sur $[a,b[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]a,b[\\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x) = \ell = g(a)$: g est continue en a

g est le prolongement par continuité de f en a

Utilisation des opérations

Exercice : Expliquer pourquoi les fonctions suivantes sont continues :

1. la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x^2+1}$$

2. la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{e^x - \sin x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Utilisation des limites

Exercice : Expliquer pourquoi les fonctions suivantes sont continues :

1. la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par

$$\begin{cases} f(x) &= \frac{x-1}{x^2-1} \quad \text{si } x \neq 1 \\ f(1) &= 1/2 \end{cases}$$

2. la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} g(x) &= \frac{x^3+8}{x+2} \quad \text{si } x \neq -2 \\ g(-2) &= 12 \end{cases}$$

Exercice :

Peut-on prolonger la fonction $x \mapsto \sin(x)\sin(1/x)$ par continuité à $\mathbb{R}$?

Théorème. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante

- si f est majorée, alors :
  1. f a une limite quand x tend vers b
  2. $\lim_{x \to b} f(x) = \sup_{x \in [a,b[} f(x)$
- si f n’est pas majorée, alors $\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$

Théorème valide si on remplace b par $+\infty$

Démonstration (1)

La fonction f est croissante et majorée sur $[a,b[$. Montrons que

$$\lim_{x\to b} f(x) = \ell = \sup_{x\in[a,b[} f(x) := \sup\{f(x);\, x \in [a,b[\}$$

Soit $\varepsilon > 0$

Par définition du sup, il existe $x_0 \in [a,b[$ tel que $\ell - \varepsilon < f(x_0)$

Alors pour tout $x \in [x_0, b[$, on a

$$\ell - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq \ell$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc montré que $\lim_{x\to b} f(x) = \ell$

Fonctions d'une variable réelle Fonctions croissantes

Démonstration (2)

La fonction f croissante n'est pas majorée sur $[a,b[$. Montrons que

$$\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$$

Soit $A > 0$

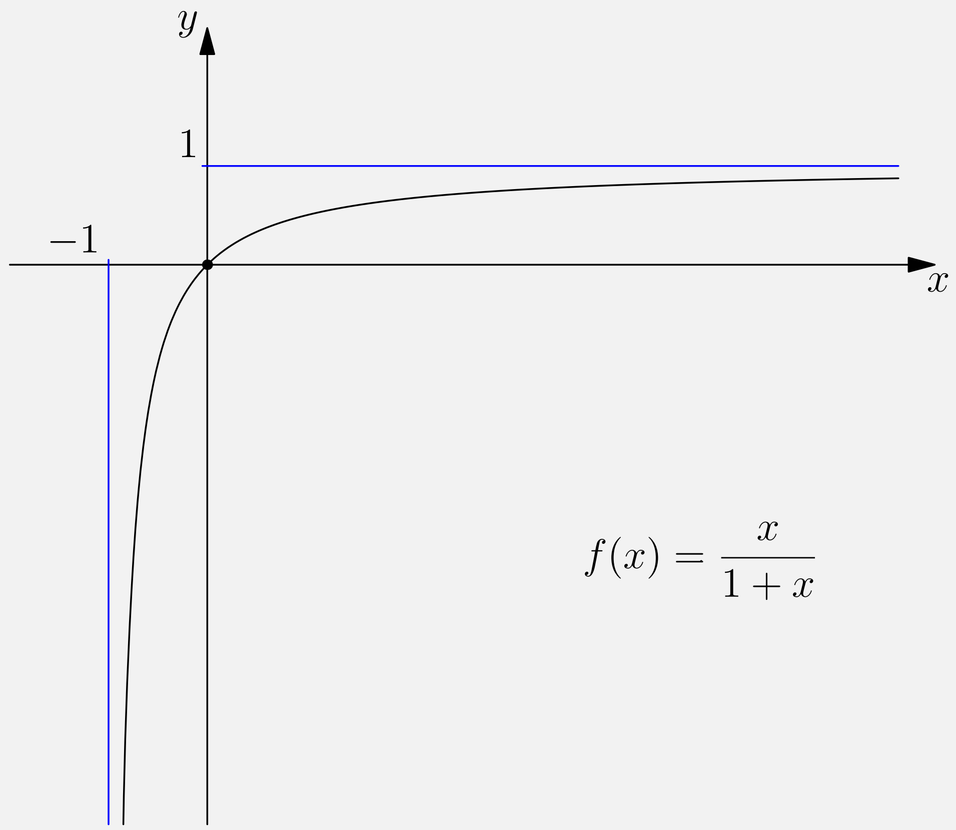
A n'est pas un majorant de f, donc il existe $x_0 \in [a,b[$ tel que $A < f(x_0)$

Alors pour tout $x \in [x_0, b[$, on a

$$A < f(x_0) \leq f(x)$$

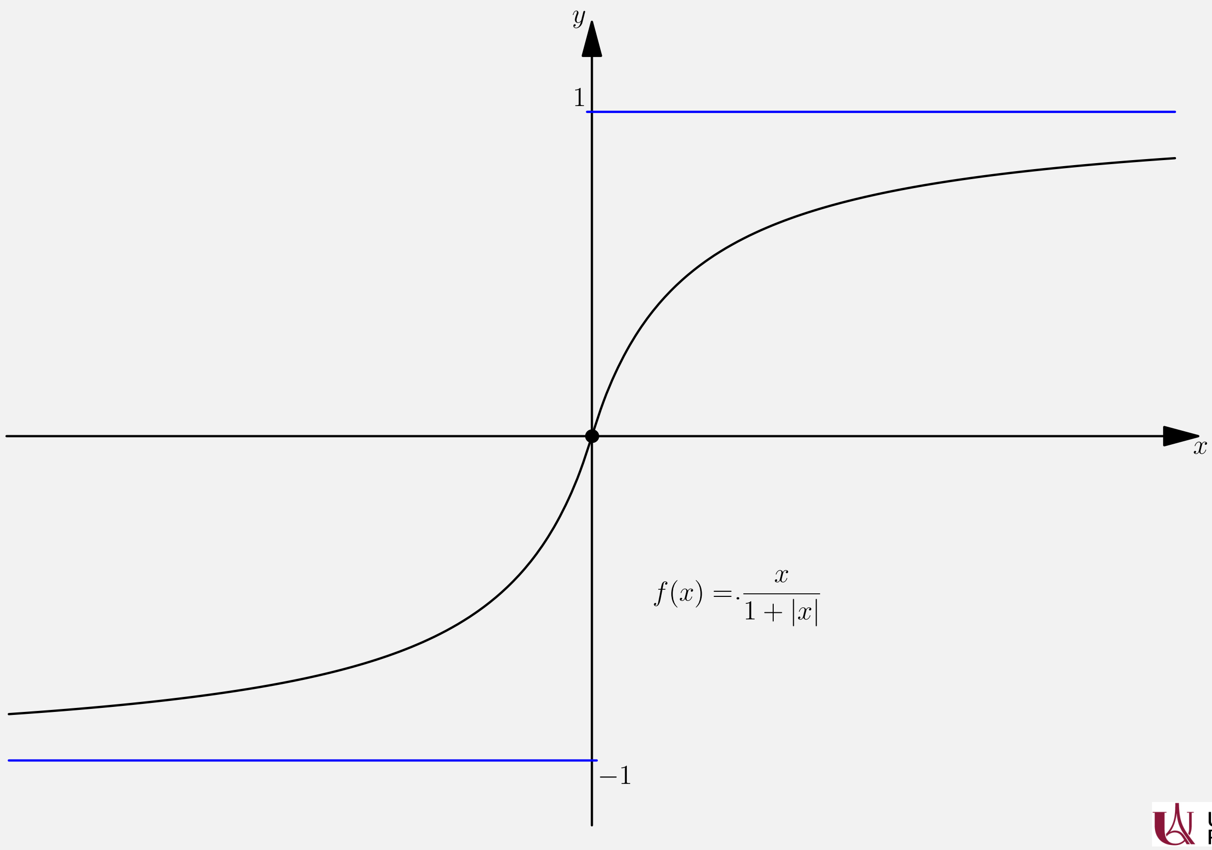
Ceci étant valable pour tout $A > 0$, on a donc montré que $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$

Fonction croissante majorée, non minorée



$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

Fonction croissante majorée et minorée



$$f(x) =. \frac{x}{1+|x|}$$

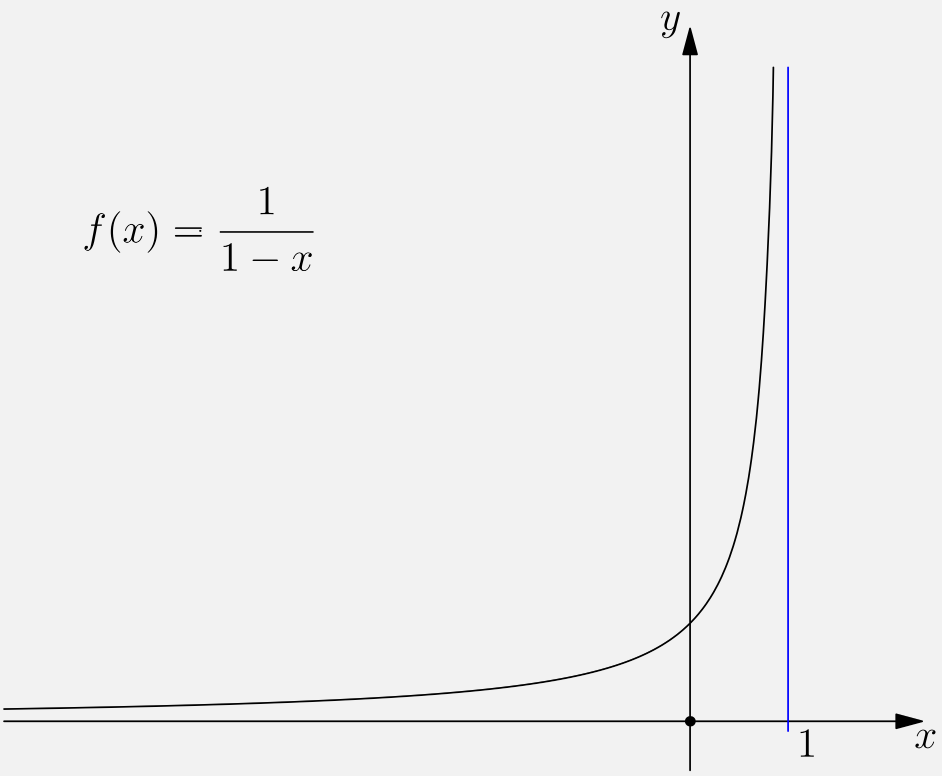
Théorème. Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante

- si f est minorée, alors :
  1. f a une limite quand x tend vers a
  2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \inf\limits_{x \in]a,b]} f(x)$
- si f n'est pas minorée, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Théorème valide si on remplace a par $-\infty$

Fonction croissante minorée, non majorée

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$



Fonction croissante ni majorée, ni minorée

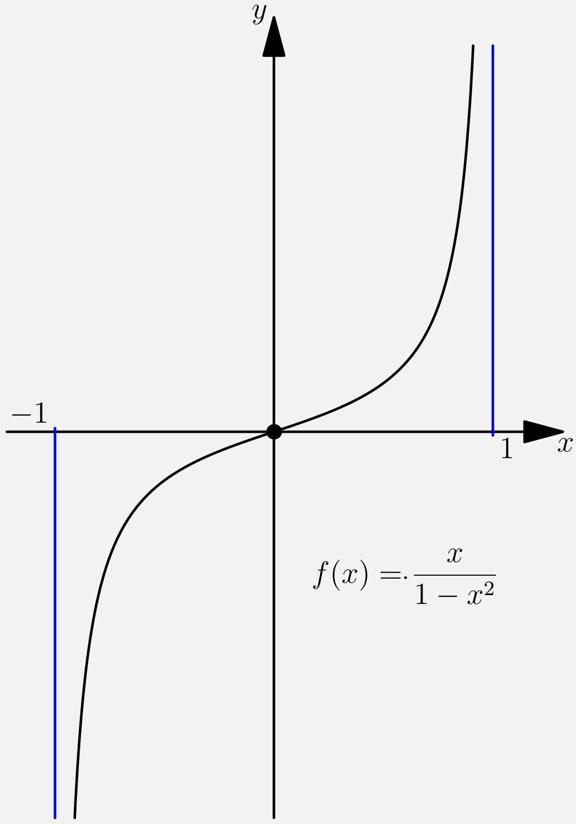


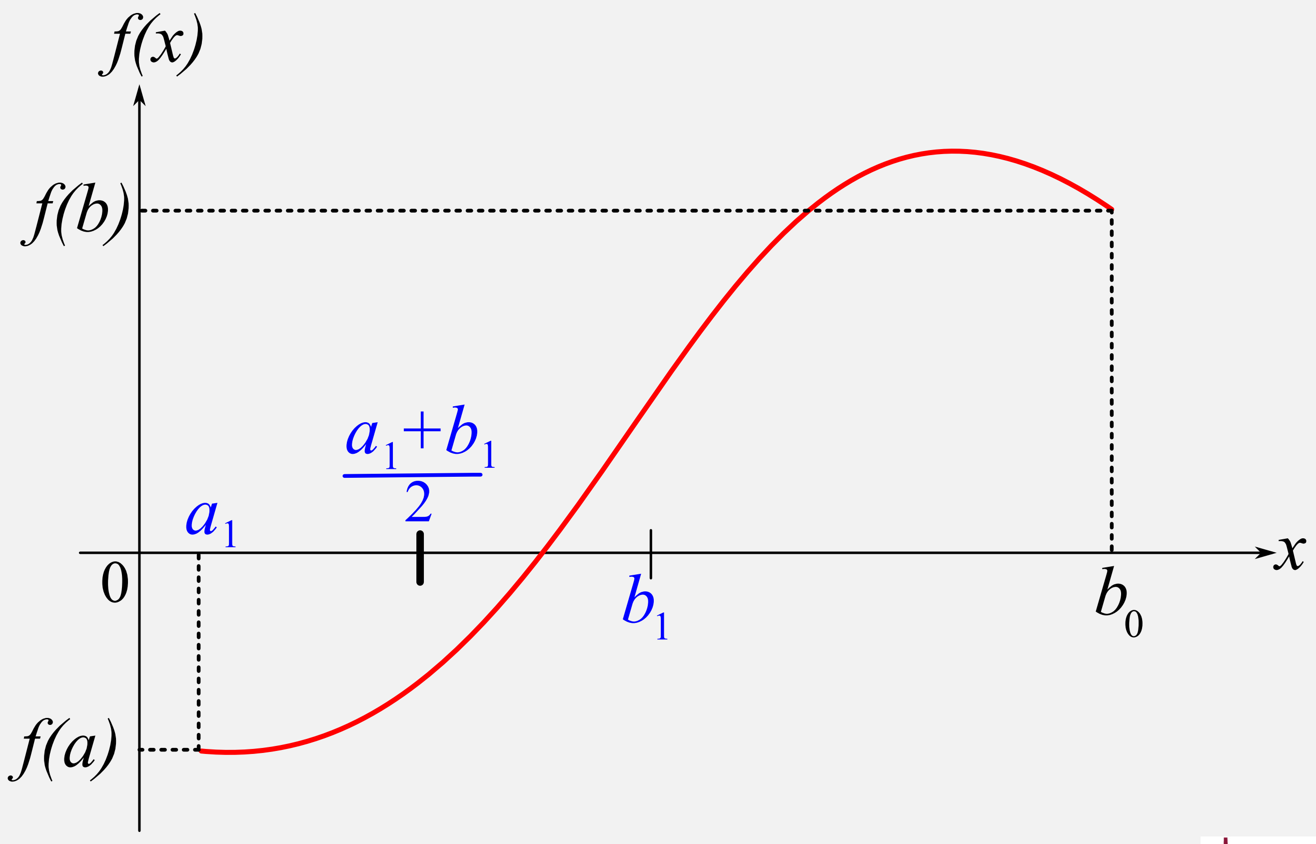
Image continue d'un intervalle

Proposition : Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue

Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors

il existe au moins un nombre $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$

Preuve : On construit, par la méthode de dichotomie, deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) d'éléments de $[a, b]$ qui convergent vers un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$



Preuve par dichotomie

Si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$, la démonstration est terminée

Dans le cas contraire, quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ comme sur la figure

Considérons alors les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$, et la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right) & \text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0 \\ \left(\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

Par construction, la suite (a_n) est croissante, et la suite (b_n) décroissante, et $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Preuve par dichotomie (suite)

Par ailleurs, on montre sans difficulté par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

On a donc $b_n - a_n = o(1)$, donc les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, donc elles convergent vers une même limite c

Par passage à la limite dans $a \leq a_n \leq b$, on trouve $c \in [a, b]$

Par ailleurs comme f est continue sur $[a, b]$ (donc en c), on a $f(a_n) \to f(c)$ et $f(b_n) \to f(c)$

Par passage à la limite dans l'inégalité

$$f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n),$$

on obtient donc $f(c) \leq 0 \leq f(c)$, donc $f(c) = 0$

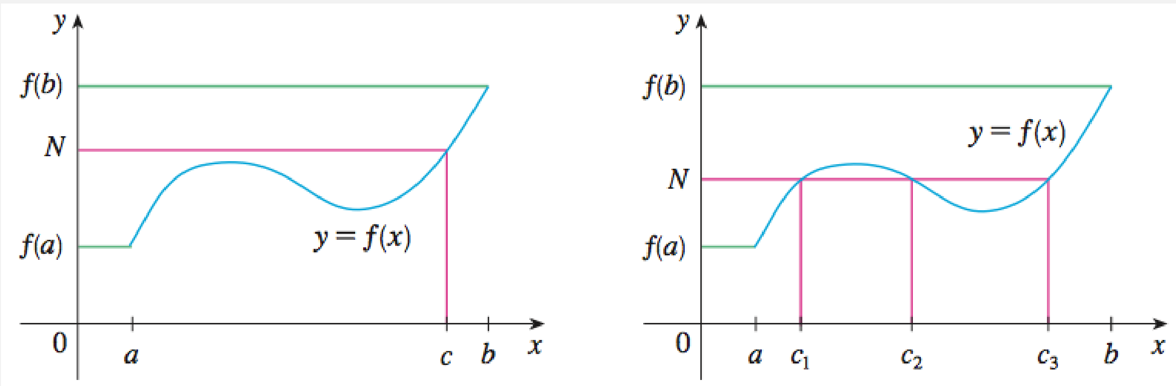
Corollaire. Un polynôme de degré impair à coefficients réels possède au moins une racine réelle

Théorème des valeurs intermédiaires.

Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue ;

Soit N un nombre strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$;

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = N$.



Exercice : Prouver que l'équation

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

admet (au moins) une solution entre 1 et 2

Exercice : Un moine tibétain quitte son monastère à 7h un jour et arrive au sommet de la montagne à 19h ce jour-là. Le lendemain, il quitte le sommet à 7h un jour et arrive à son monastère à 19h, en passant par le même chemin. Montrer qu'il existe un lieu de ce chemin où il est passé exactement à la même heure les deux jours.

Corollaire. Si une fonction f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle

Exercice : Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $x \in I$, $f(x)^2 = 1$. Montrer que f est constante.

Théorème. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur l'intervalle fermé et borné $[a,b]$. Alors :

1. la fonction f est bornée sur $[a,b]$
2. $f\big([a,b]\big) = [m,M]$,

   avec $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$

Autrement dit, toute fonction continue sur un intervalle fermé borné atteint ses bornes sur cet intervalle

Rappel : Injectivité - Surjectivité - Bijectivité

Définition. Une application (quelconque) $f : A \to B$ est

- injective si deux éléments distincts de A n'ont jamais la même image par f, c-à-d

  $$\forall a, a' \in A,\ f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

  Autre caractérisation : tout élément de B a **au plus** un antécédent par f
- surjective si tout élément de B a au moins un antécédent par f, c-à-d

  $$\forall b \in B,\ \exists a \in A,\ f(a) = b$$
- bijective si elle est à la fois injective et surjective, c-à-d si tout élément de B a **exactement** un antécédent par f (la fonction qui à un élément de B fait correspondre son antécédent est f^{-1})

Exercice : Parmi les applications ci-dessous, lesquelles sont injectives ? surjectives ? bijectives ?

- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f_1(x) = x^2$
- $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ avec $f_2(x) = x^2$
- $f_3 : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ avec $f_3(x) = \sin x$
- $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f_4(x) = e^x$
- $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ avec $f_5(x) = e^x$

Proposition. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone. Alors f est injective.

Preuve : Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer f strictement croissante. Soit alors $x, y \in I$ tels que $x \neq y$.

Soit $x < y$ et alors $f(x) < f(y)$.

Soit $x > y$ et alors $f(x) > f(y)$.

Dans les deux cas, on a $f(x) \neq f(y)$.

Conclusion : f est injective.

Théorème. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors :

1. $f(I)$ est un intervalle et f est une bijection de I sur $f(I)$
2. si a et b sont les bornes de l'intervalle I, alors $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to b} f(x)$ sont les bornes de l'intervalle $f(I)$
3. la bijection réciproque de f est continue, strictement monotone et de même sens de variation que f

Exercice :
a) montrer que pour tout $y \geq 0$, il existe un unique $x \geq 0$ solution de $xe^x = y$
b) on note cette solution $g(y)$ (elle dépend de y)
c) donner le tableau de variation de la fonction g entre 0 et $+\infty$

Exercice : Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$$

est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$

Donner une formule pour $f^{-1}(x)$

Fonctions d’une variable réelle - dérivabilité

1. La dérivée
2. Introduction
   - Définitions
   - Dérivée à droite et à gauche
   - Autre expression pour la dérivabilité
   - Dérivation et continuité
   - Dérivée et opérations
   - Dérivées des fonctions usuelles
   - Exercices
   - Dérivées successives
3. Utilisation de la dérivée
   - Extrema locaux d’une fonction
   - Théorème de Rolle
   - Théorème des accroissements finis
   - Règle de l’Hôpital
   - Limites remarquables

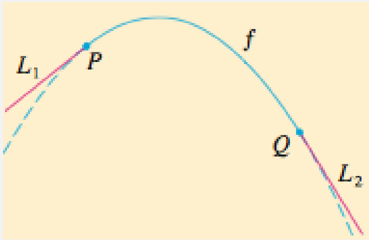
Dérivée :

- approche analytique : vitesse, accélération, taux d'une évolution temporelle

Princ. fondamental de la dynamique : $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{\text{Position}}''$

$\hookrightarrow$ trajectoires projectiles, satellites, planètes

- approche géométrique : tangente



Dérivée en un point

Définition. Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$

On dit que f est dérivable en x_0 si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie

On note alors $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

et $f'(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé de f en x_0

Fonction dérivée

Définition. Soit I un intervalle, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction
On dit que f est dérivable sur I si, quel que soit $x_0 \in I$, f est dérivable en x_0

Dans ce cas la fonction

$$\begin{array}{rccc} f' : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

est appelée dérivée de f

Interprétation

La quantité $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est le taux d'accroissement de f entre x_0 et x

Il correspond à la pente de la droite passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$

Dire que la fonction f est dérivable en x_0 signifie que cette pente admet une limite (finie) lorsque x tend vers x_0

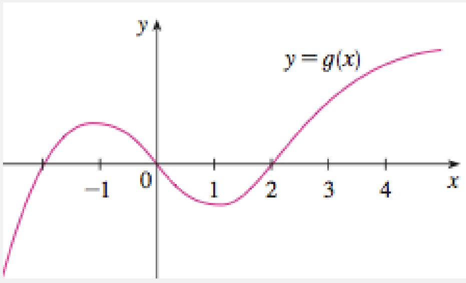
Dans ce cas la limite $f'(x_0)$ est la pente de la tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$

Proposition : Si f est dérivable en x_0, alors la tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$ a pour équation

$$y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$$

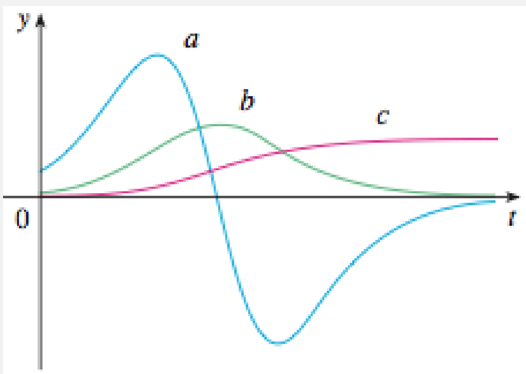
Exercice : Trouver l'équation de la tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point $A(1, 1)$ puis au point $B(0, 0)$

Exercice : Soit g la fonction dont le graphe est représenté ci-dessous. Ordonner les nombres $0,\ g'(-2),\ g'(0),\ g'(2),\ g'(4)$



Interprétation physique : si $f(t)$ désigne la position, sur un axe, d'un mobile à l'instant t, alors $f'(t)$ désigne sa vitesse à l'instant t et $f''(t)$ désigne son accélération à l'instant t

Exercice : Sur le graphe suivant sont représentées, en fonction de l'instant t, la position d'un mobile sur un axe, sa vitesse et son accélération. Identifiez les trois courbes



Dérivée à droite

Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$

On dit que f est dérivable à droite en x_0 si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie

Notation : $f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Dérivée à gauche

Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$

On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie

Notation : $f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Proposition : Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathring{I}$ (l'intérieur de I)

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est continue en x_0, dérivable à droite et à gauche en x_0 avec $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

Exercice : Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 + x + 3 & \text{si } x \geq 0 \\ e^x + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est continue et dérivable en 0

Exercice : La fonction $f : x \mapsto |x|$ est-elle dérivable en 0 ?

Si on pose $x - x_0 = h$, alors

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right] = 0$$

Pour $h \in \mathbb{R}$, soit $\begin{cases} \alpha(h) & = & \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \\ \alpha(0) & = & 0 \end{cases}$

Alors

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\alpha(h)$$

Donc, si f est dérivable en x_0, il existe une fonction α, continue en 0, telle que

$$\begin{array}{rcl} f(x_0+h) & = & f(x_0) + hf'(x_0) + h\alpha(h) \\ \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \alpha(h) & = & 0 \end{array}$$

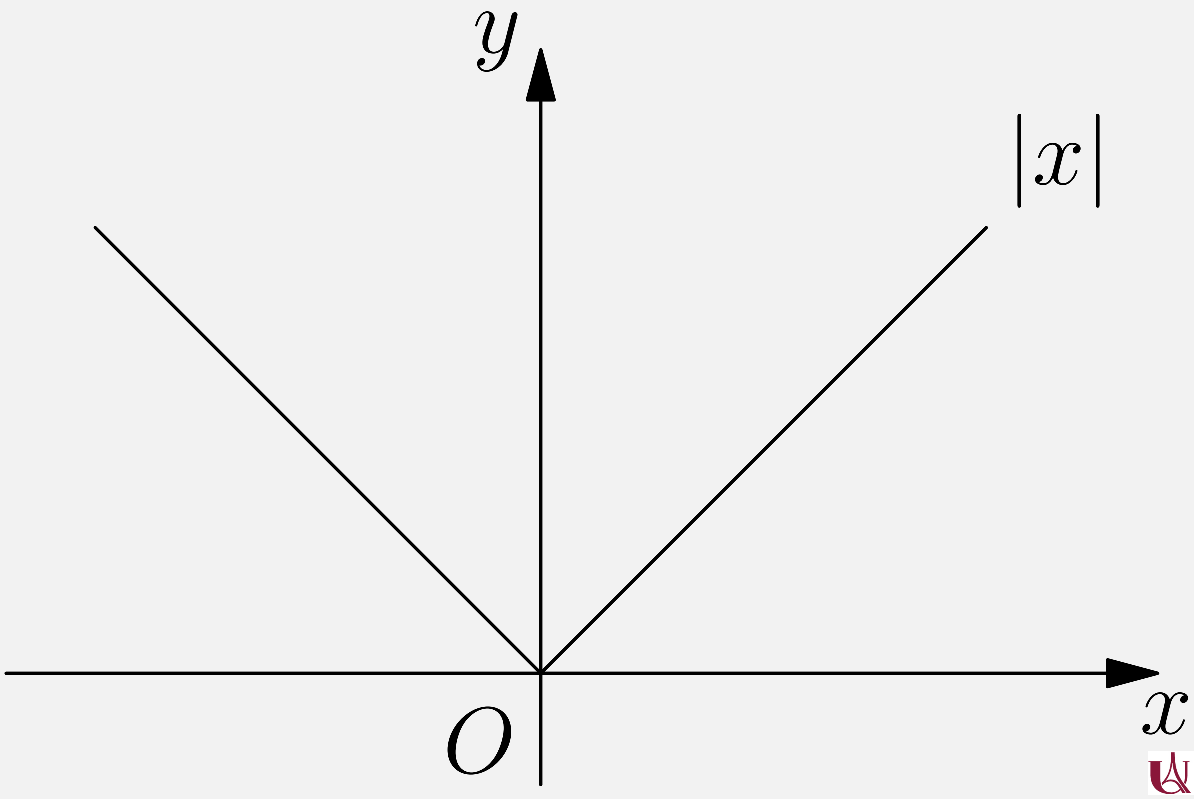
Proposition. Si une fonction est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0

Si f est dérivable en x_0, alors il existe une fonction α continue en 0 telle que $\alpha(0) = 0$ et $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\alpha(h)$

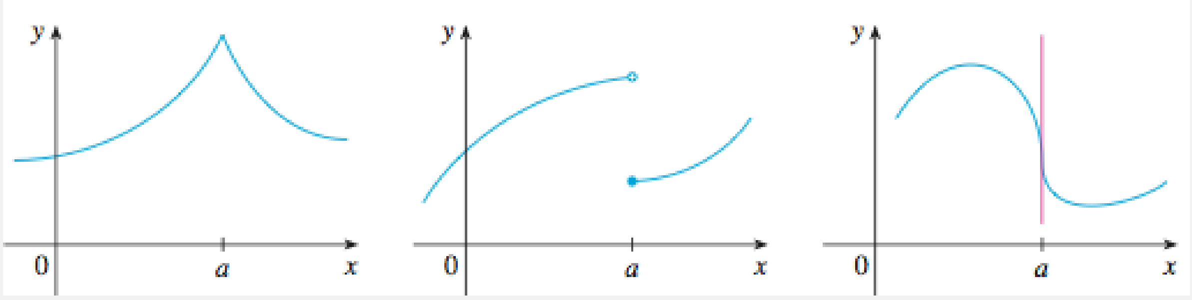
On a donc $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Attention : une fonction dérivable est continue, mais le contraire est faux (c-à-d que cette proposition n'admet pas de réciproque)

Fonction continue non-dérivable



Exercice : Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en *a* ?



Dérivée et opérations

Dérivées de la somme et du produit

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $x_0 \in I$

Si f et g sont dérivables en x_0, alors

- $(f+g)$ est dérivable en x_0

$$\text{et} \quad (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

- $f \times g$ est dérivable en x_0

$$\text{et} \quad (f \times g)'(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + f(x_0) \times g'(x_0)$$

$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$$

Dérivée de la composée de f et g

Soit f et g deux fonctions

- f définie et dérivable sur l'intervalle I
- g définie et dérivable sur l'intervalle J
- $f(I) \subset J$, de sorte que $g \circ f$ existe

Alors $g \circ f$ est dérivable en tout $x_0 \in I$ et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \times f'(x_0)$$

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$$

Dérivée d'un quotient

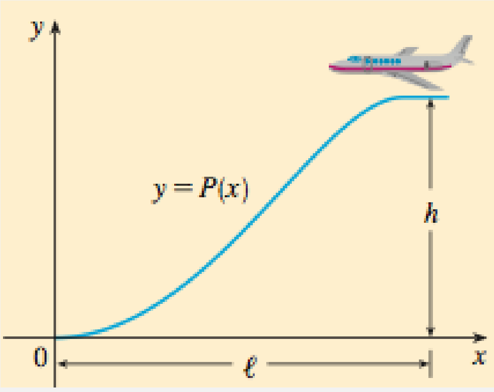
Dérivée de $\frac{f}{g}$

On écrit
$$\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$$

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1} $(n \in \mathbb{Z})$		$u(x)^n$	$n \cdot u(x)^{n-1} u'(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$		$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
e^x	e^x		$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$		$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$		$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$		$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$
$\tan(x)$	$1 + tan^2(x)$		$\tan(u(x))$	$u'(x)\left(1 + \tan^2(u(x))\right)$

Exercice : La trajectoire d'atterrissage d'un avion est soumise aux contraintes apparaissant dans la figure suivante (hauteur h, longueur ℓ, pentes initiale et finale nulles). Donner une fonction altitude $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ qui intègre toutes ces contraintes



Exercices

Dérivées à l’aide des opérations

Montrer que $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(1-e^x)}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Exercices

Le cas des fonctions prolongées

Soit $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue en 0
2. Montrer que f est dérivable en 0

Dérivées successives

Dérivées successives

Définition. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable

- si f' est dérivable, alors on dit que f est deux fois dérivable sur I

  et on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f sur I
- si f est $(n-1)$ fois dérivable et si sa dérivée d'ordre $(n-1)$ est elle-même dérivable alors on dit que f est n fois dérivable

  et on note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n (ou dérivée n-ième) de f sur I
- si f est n fois dérivable et si sa dérivée n-e est continue alors on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ (noté $f \in \mathcal{C}^n(I)$)

$\mathcal{C}^0(I)$: l'ens. des fonctions continues sur I

$\mathcal{C}^1(I)$: l'ens. des fonctions dérivables sur I, de dérivée continue

etc.

Dérivées successives

Formule de Leibniz pour le produit de deux fonctions

Théorème (formule de Leibniz). Si f et g sont n fois dérivables sur un intervalle I, alors

- $f \times g$ est n fois dérivable sur I
- $\forall x, \quad (f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \times g^{(n-k)}(x)$

  Noter l'analogie avec la formule du binôme de Newton :

  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ pour tout $a, b \in \mathbb{C}$

Exercice : Soient f et g deux fonctions 4 fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée quatrième de $f \times g$.

Extrema locaux d'une fonction

Définitions

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I

Soit $x_0 \in I$, on dit que

- f a un maximum local en x_0 si

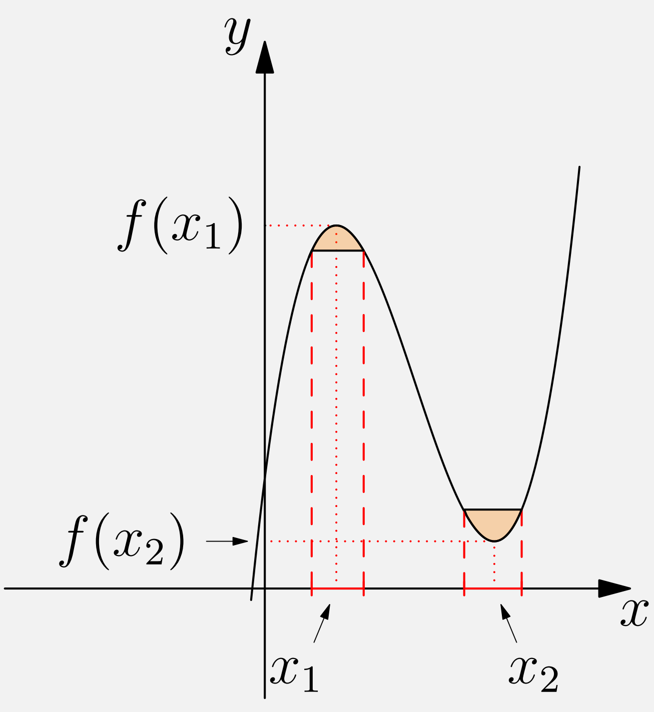
$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x \in I, \ |x - x_0| \leq \alpha \implies f(x) \leq f(x_0)$$

- f a un minimum local en x_0 si

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x \in I, \ |x - x_0| \leq \alpha \implies f(x) \geq f(x_0)$$

- f a un extremum local en x_0 si elle a un maximum local ou un minimum local en x_0

Illustration

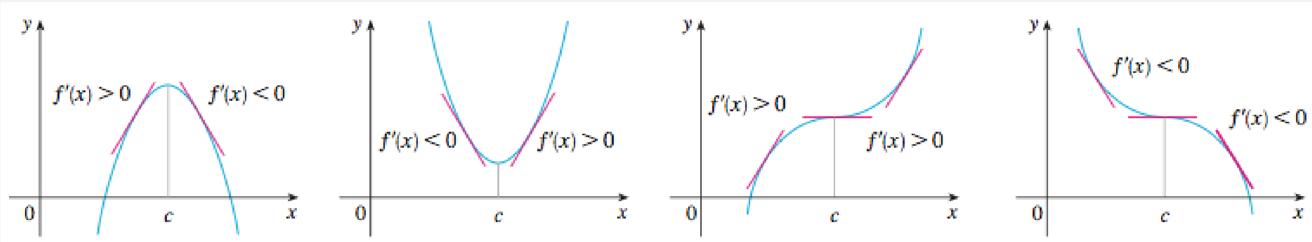


Condition nécessaire pour un extremum

Théorème. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I

Si f a un extremum local en $x_0 \in I$, alors $f'(x_0) = 0$

Attention : On peut avoir $f'(x_0) = 0$ sans que la fonction ait un extremum en x_0 (la condition n'est pas suffisante)



Remarque : Une fonction peut avoir un extremum en x_0 sans être dérivable en x_0

Exercice

Quel est, à volume fixé, la forme du cylindre de surface minimale ?
Motivation : par ex. construire une boite de conserve de volume donné (et d'épaisseur donnée) avec le moins de métal possible

Soit V le volume du cylindre, R le rayon de sa base, et h sa hauteur,

$$V = \pi R^2 h \quad \text{donc} \quad h = \frac{V}{\pi R^2}$$

La surface du cylindre est

$$f(R) = 2\pi R^2 + 2\pi R h = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}$$

Exercice (suite)

$$f(R) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}$$

La fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et dérivable avec

$$\forall R > 0, \quad f'(R) = 4\pi R - 2\frac{V}{R^2} = \frac{2}{R^2}(2\pi R^3 - V)$$

Le seul minimum local de f est atteint quand $2\pi R^3 = V$, soit $h = 2R$

C'est le minimum global de f car $\lim\limits_{0} f = \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ (un simple tableau de variation le confirme)

La cylindre solution a donc un diamètre égal à sa hauteur

Théorème de Rolle

Théorème des accroissements finis

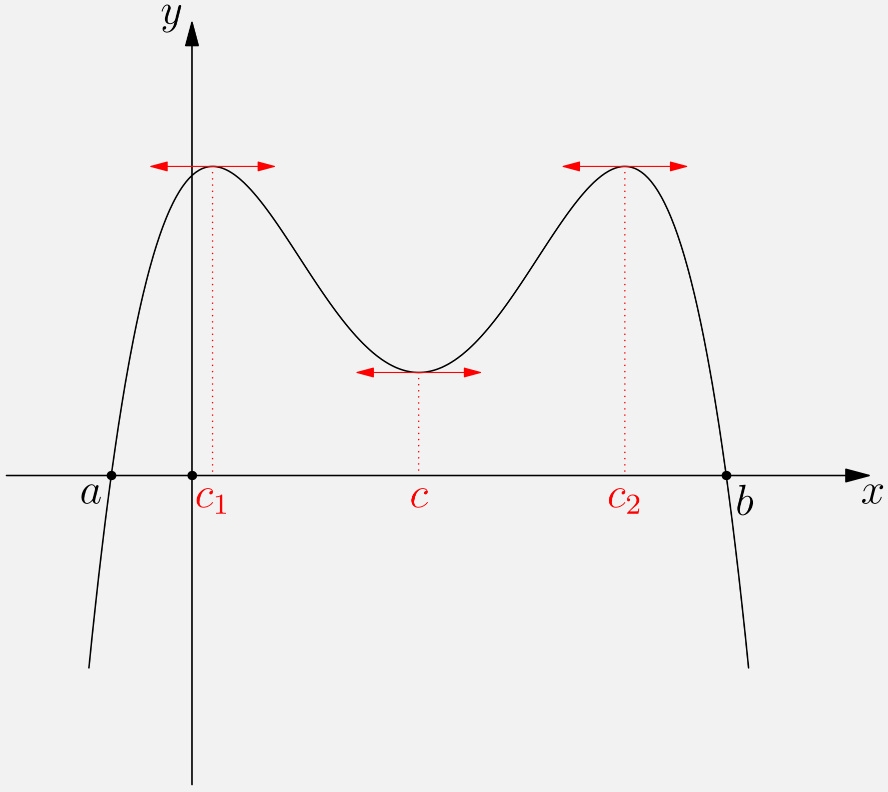
Théorème de Rolle

Soit a et b deux nombres réels, avec $a < b$
Théorème de Rolle. Si une fonction f définie sur $[a, b]$ vérifie

- f continue sur $[a, b]$ (intervalle fermé)
- f dérivable sur $]a, b[$ (intervalle ouvert)
- $f(a) = f(b)$

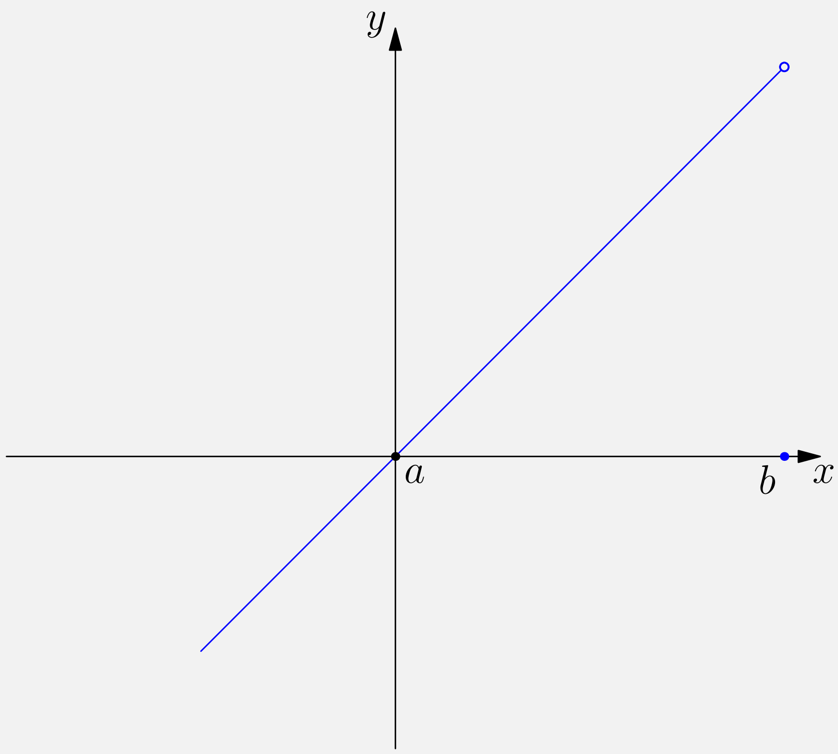
alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Théorème de Rolle



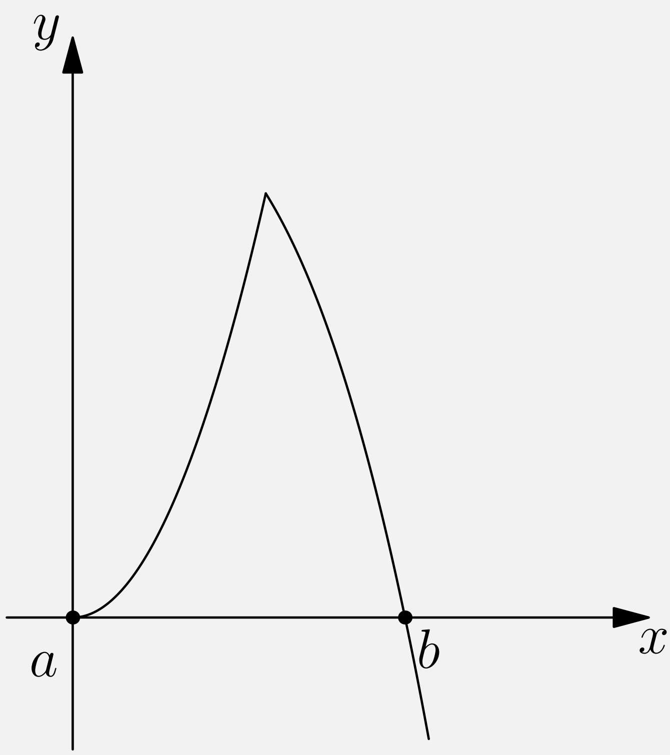
Le théorème de Rolle ne s'applique pas

. . . si f n'est pas continue sur $[a, b]$



Le théorème de Rolle ne s'applique pas

. . . si f n'est pas dérivable sur $]a, b[$



Exercice

Comment utiliser le théorème de Rolle ?

Entre deux racines de l'équation "$e^x \sin x = 1$", il existe une racine de l'équation "$e^x \cos x = -1$"

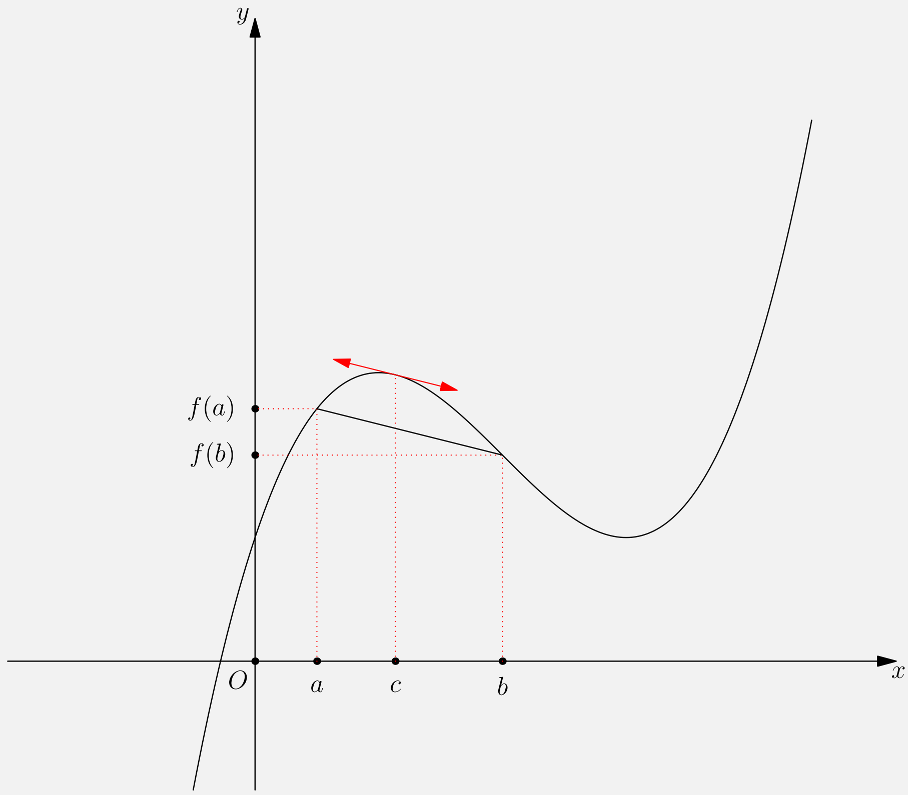
Théorème des accroissements finis (TAF)

Soit a et b deux nombres réels, avec $a < b$

Théorème des accroissements finis. Si une fonction f définie sur $[a, b]$ vérifie

- f continue sur $[a, b]$ (intervalle fermé)
- f dérivable sur $]a, b[$ (intervalle ouvert)

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Théorème des accroissements finis

Corollaires

Soit a et b deux nombres réels, avec $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$ avec

- f continue sur $[a, b]$ (intervalle fermé) ;
- f dérivable sur $]a, b[$ (intervalle ouvert).

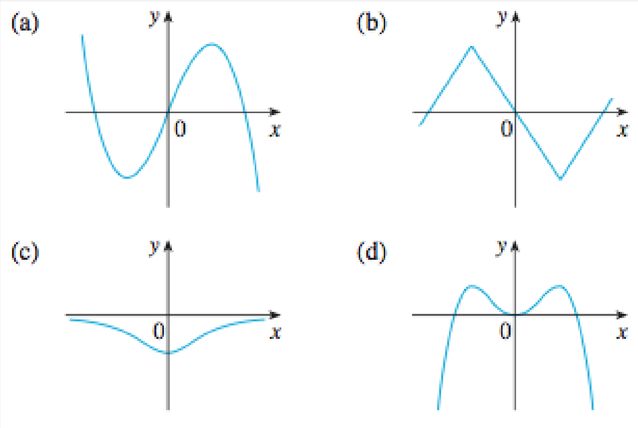
Corollaire 1 : $\forall x \in]a, b[, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow$ f constante sur $[a, b]$

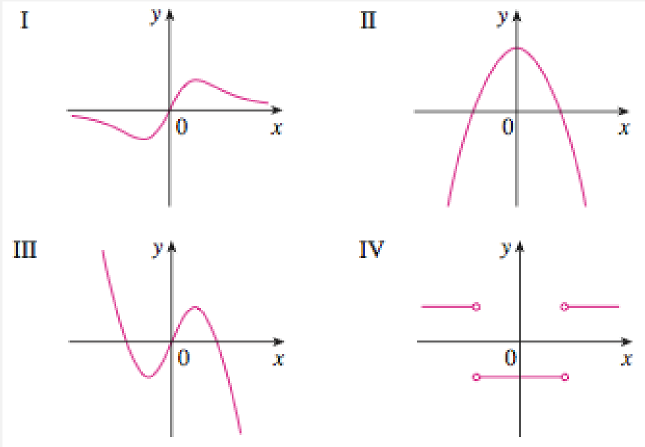
Corollaire 2 : $\forall x \in]a, b[, \quad f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ f croissante sur $[a, b]$

Corollaire 3 : $\forall x \in]a, b[, \quad f'(x) > 0 \Rightarrow$ f strictement croissante sur $[a, b]$

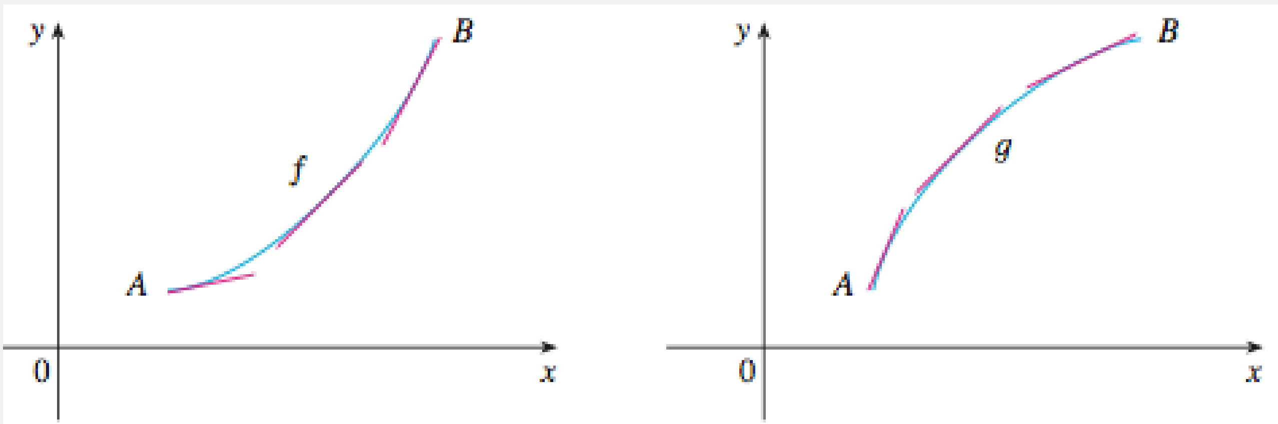
Remarque : idem pour $f' \leq 0$ et f décroissante

Exercice : Associer les courbes représentatives des functions (a)–(d) aux courbes de dérivées correspondantes I–IV

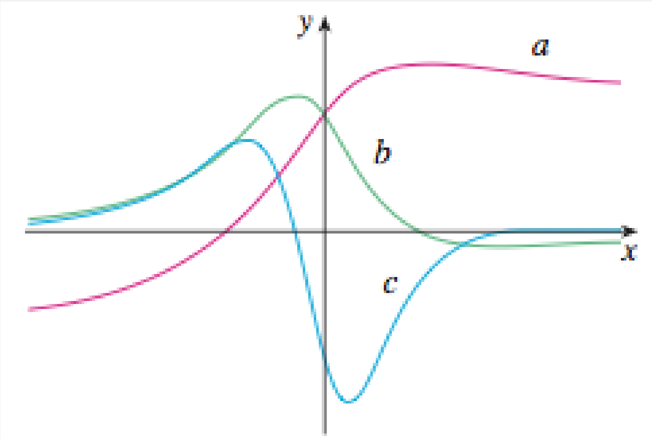


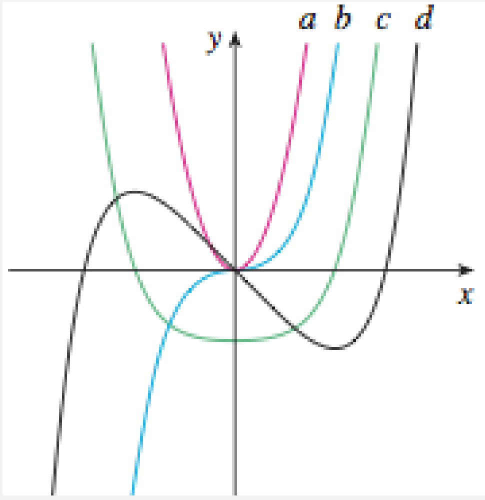


Exercice : Les courbes de deux fonctions f et g ont été représentées ci dessous, avec certaines de leurs tangentes. Sauriez-vous donner les signes de f'' et de g'' ?



Exercice : a) Sur la figure de gauche sont représentées les fonctions f, f', f''. Identifiez-les.
b) Sur la figure de droite sont représentées les fonctions g, g', g'', g'''. Identifiez-les.





Inégalité des accroissements finis

Théorème (Inégalité des accroissements finis).
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et vérifiant

$$\forall t \in I, \quad |f'(t)| \leq K$$

pour une certaine constante $K > 0$. Alors

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|$$

Exercice : Prouver que pour tous $x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$,
$|x - y| \leq |\tan x - \tan y| \leq 2\,|x - y|$

Règle de l'Hôpital

Règle de l'Hôpital

Théorème. Soit f et g deux fonctions définies au voisinage I d'un réel a et dérivables en a

$$\text{Si } \begin{cases} f(a) = g(a) = 0 \\ g'(a) \neq 0 \end{cases}, \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Preuve : On a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Exercice : Calculer

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x} - 1}$$

Exercice : Calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x \cos x - x}$$

(*Indice :* commencer par simplifier !)

Applications

Équivalents à connaître

- $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ car $\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ $(\sin'(0) = 1)$
- $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$ car $\frac{\tan x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ $(\tan'(0) = 1)$
- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ car $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ $(\ln'(1) = 1)$
- $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ car $\frac{e^x-1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ $(\exp'(0) = 1)$
- $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$, c'est-à-dire $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)$
- plus généralement : $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$

  En effet $\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ avec
  $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\quad f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ $\quad$ et $\quad f'(0) = \alpha$

Exercice

Exercice : Déterminer $\left\{t > 0 : 4^t - 3^t = 2^t - 1 \quad (\star)\right\}$

- pour $x > 0$, soit $f(x) = x^t = \exp(t \ln x)$
- f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \frac{t}{x} \times \exp(t \ln x) = tx^{t-1}$
- $(\star)$ équivaut à $f(4) - f(3) = f(2) - f(1)$
- f continue sur $[3,4]$, dérivable sur $]3,4[)$: d'après le théorème des accroissements finis entre 3 et 4,

  $\exists c \in]3,4[, \quad \frac{f(4)-f(3)}{4-3} = f'(c)$

  soit $f(4) - f(3) = tc^{t-1}$
- d'après le théorème des accroissements finis entre 1 et 2,

  $\exists d \in]1,2[$ tel que $f(2) - f(1) = td^{t-1}$
- donc $c^{t-1} = d^{t-1}$, soit $(t-1)\ln c = (t-1)\ln d$
- **Conclusion : l'unique solution est $t = 1$**