Licence 1re année
Mathématiques et calcul
1er semestre

Quentin Denoyelle
quentin.denoyelle@u-paris.fr

(avec la collaboration de
A. Chambaz, L. Moisan et F. Benaych)

Université Paris Cité, campus Saint-Germain-des-Près

1. Nombres complexes et polynômes

2. Suites

Nombres complexes et polynômes

Pourquoi les nombres complexes ?

Indispensables, notamment via l'analyse de Fourier, en :

- physique (mécanique des fluides, mécanique quantique, cosmologie)
- traitement du signal
- probabilités et statistique
- traitement des images (algorithmes de Snapshat, Instagram, Photoshop, etc. . .)
- . . .

Historique

Introduits au XVIe siècle par Cardan, Bombelli, . . . comme un artifice pour résoudre l'équation du 3e degré.

Exemple : Pour résoudre l'équation

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

les formules générales imposent de résoudre d'abord

$$x^2 + 6x + \frac{343}{27} = 0$$

dont le discriminant $\Delta = 6^2 - 4 \times \frac{343}{27} = \frac{-400}{27}$ est négatif !
L'introduction du nombre "imaginaire" $\sqrt{\Delta}$ (dont le carré est négatif) permet alors de continuer formellement les calculs, qui aboutissent ensuite à des solutions (1,2,-3) toutes réelles !

Artifice "magique" à l'époque, aujourd'hui notion bien comprise.

On définit formellement le nombre imaginaire i comme une racine carrée de -1 : $i^2 = -1$

On définit l'ensemble des nombres complexes comme :

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \quad : \quad x,\ y \in \mathbb{R}\}$$

- x est la partie réelle de z, notée : $x = \mathrm{Re}(z)$
- y est la partie imaginaire de z, notée : $y = \mathrm{Im}(z)$

- $z = x + iy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0$
- $z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y')$
- $zz' = z'z = (x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$
- $x + iy = x' + iy' \quad \Leftrightarrow \quad x = x'$ et $y = y'$
- $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$
- Si $x + iy \neq 0$: $\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$

... donc $\dfrac{x' + iy'}{x + iy} = \dfrac{(x' + iy')(x - iy)}{x^2 + y^2} = \dfrac{xx' + yy'}{x^2 + y^2} + i\dfrac{xy' - x'y}{x^2 + y^2}$

Exercice :

Mettre les nombres complexes suivants sous la forme $x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $(5+6i)+(3-2i)$
2. $(4-\frac{1}{2}i)-(3-\frac{5}{2}i)$
3. $(3+2i)(5-3i)$
4. $(1-\frac{i}{3})(2+6i)$
5. $2(4+i)$
6. i^3
7. i^4
8. $\frac{1}{2+3i}$
9. $\frac{2+2i}{2-i}$
10. $\frac{3-5i}{3+2i}$

Somme de puissances

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout entier $n \neq 0$

$$\begin{aligned} b^{n+1} - a^{n+1} &= (b-a)(b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \cdots + b^1 a^{n-1} + a^n) \\ &= (b-a)\sum_{k=0}^{n} b^{n-k}a^k = (b-a)\sum_{k=0}^{n} b^k a^{n-k} \end{aligned}$$

avec $a^0 = b^0 = 1$

$n=0$: $\quad b-a = (b-a)\times 1$

$n=1$: $\quad b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$

$n=2$: $\quad b^3 - a^3 = (b-a)(b^2+ab+a^2)$

Conséquence : pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \geq 0$,

$$z^{n+1} - 1 = (z-1)(1+z+z^2+\cdots\cdots+z^n)$$

et donc, si $z \neq 1$,

$$1+z+z^2+\cdots\cdots+z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

Somme de puissances : démonstration

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout entier $n \neq 0$;

$$b^{n+1} - a^{n+1} = (b-a)(b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \cdots\cdots + b^1 a^{n-1} + a^n)$$

Posons $S = b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \cdots\cdots + b^1 a^{n-1} + a^n$. On a :

$$\begin{aligned}(b-a)S &= bS - Sa \\ &= (b^{n+1} + b^n a + b^{n-1}a^2 + \cdots\cdots + ba^n) \\ &\quad -(b^n a + b^{n-1}a^2 + \cdots\cdots + ba^n + a^{n+1}) \\ &= b^{n+1} - a^{n+1}\end{aligned}$$

Le binôme de Newton

Pour tous nombres complexes a et b et tout nombre entier $n \neq 0$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

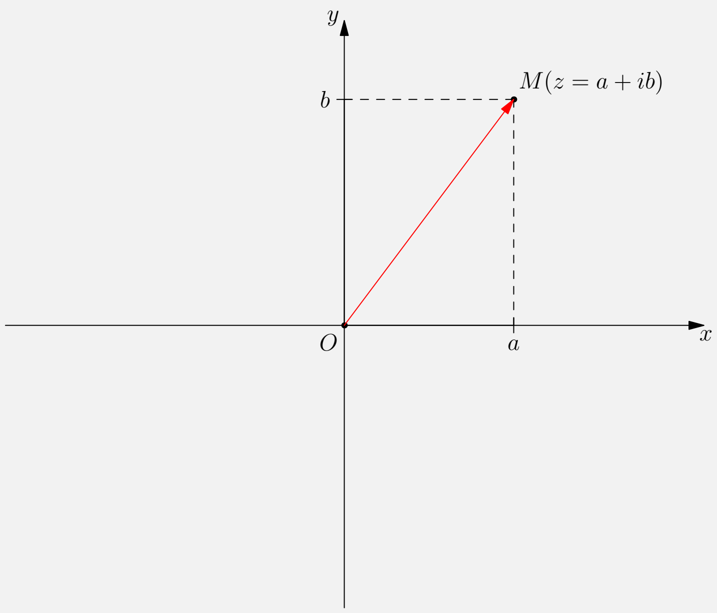
avec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et $k! = 1 \times 2 \times \cdots \times k$

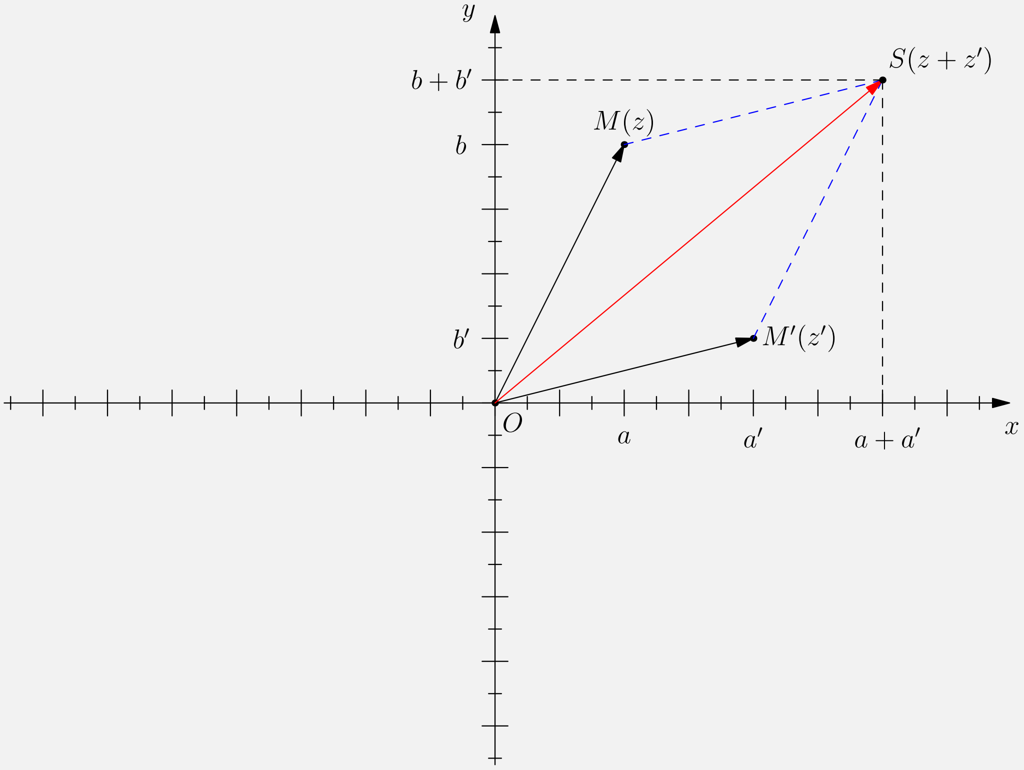
- $(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2 b + 3\,ab^2 + b^3$
- $(a+b)^6 = a^6 + 6\,a^5 b + 15\,a^4 b^2 + 20\,a^3 b^3 + 15\,a^2 b^4 + 6\,ab^5 + b^6$

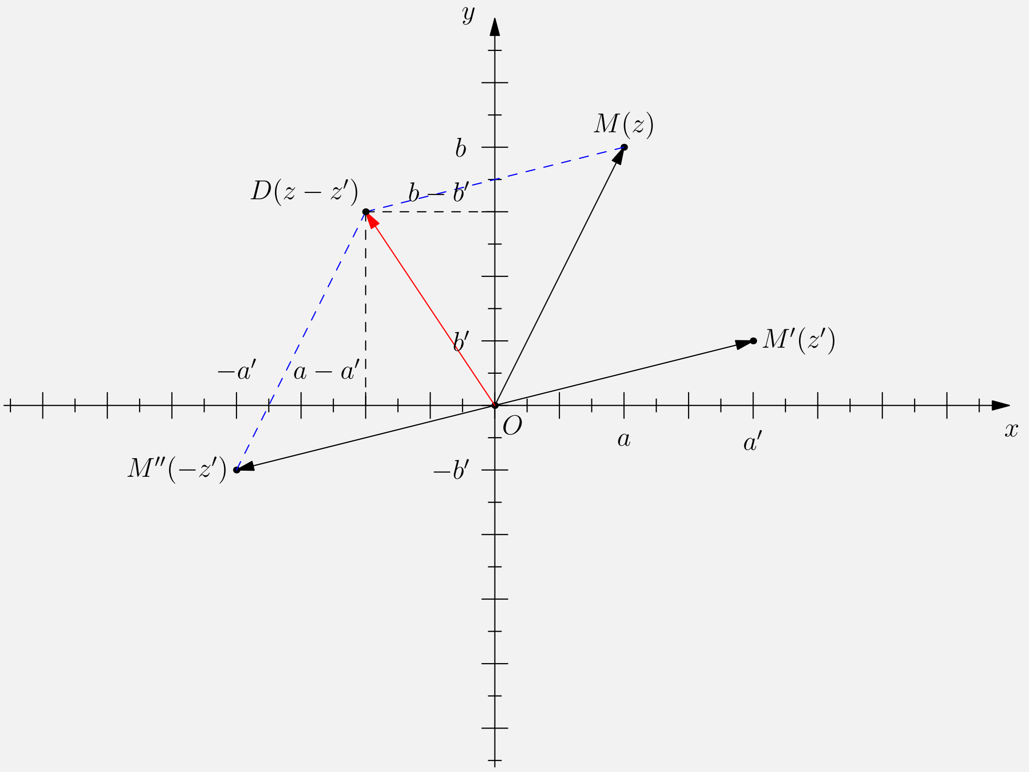
Exercice : Soit $z = 2 - i$. Mettre z^4, puis $1 + z + z^2 + z^3$ sous la forme $x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

Le nombre complexe z s'appelle l'affixe du point M de coordonnées (a, b) dans le plan



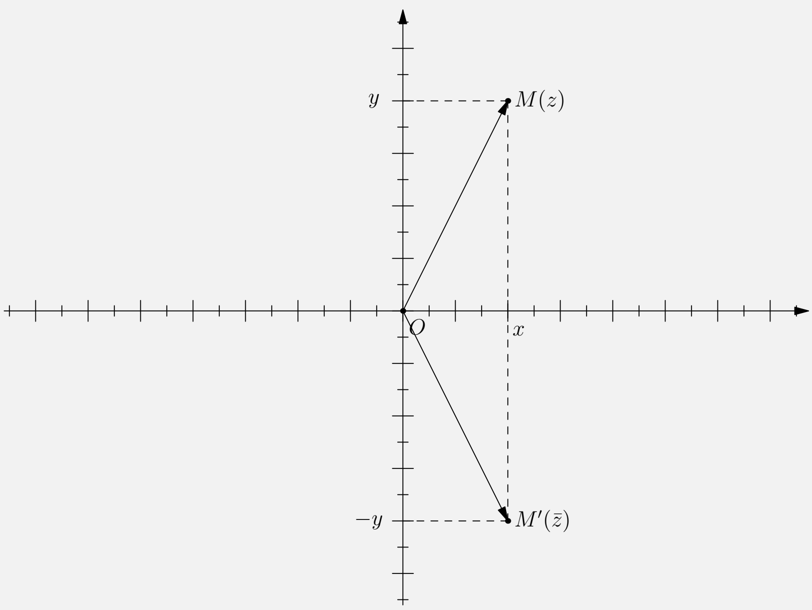




Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

On appelle nombre complexe conjugué de z, le nombre :

$$\bar{z} = x - iy$$



Conjugué : règles de calcul

$$z = x + iy \qquad \bar{z} = x - iy$$

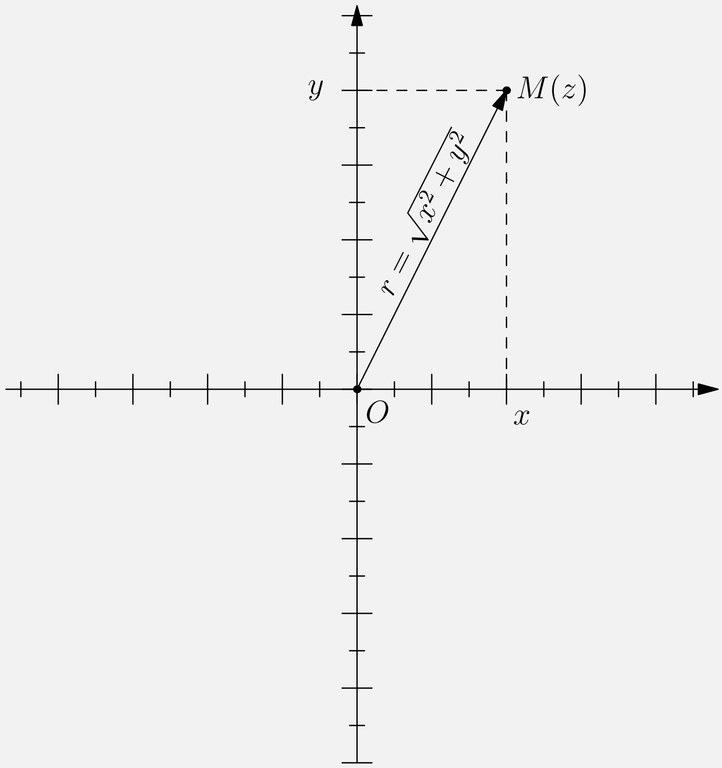
- $\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z)$
- $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $z \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad z = \bar{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad z + \bar{z} = 0$
- $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\quad \overline{(\bar{z})} = z$, $\quad \overline{(z_1 \times z_2)} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $\quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

Exercice : a) Calculer $\overline{2 + 3i}$ b) Résoudre $z + 2\bar{z} = 0$

On appelle module du nombre complexe z, le nombre réel :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- $|z| = |-z| = |\bar{z}|$, $\quad |x| \leq |z|$, $\quad |y| \leq |z|$
- $|z| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = 0$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$; $\quad |1/z| = 1/|z|$; $\quad |z/z'| = |z|/|z'|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$



On considère le plan complexe, muni d'un repère orthonormé

Proposition : Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \geq 0$. L'ensemble des points d'affixe z vérifiant l'équation

$$|z - z_0| = r$$

est le cercle de centre Ω (d'affixe z_0) et de rayon r

Proposition : Soient $a, b \in \mathbb{C}$. L'ensemble des points d'affixe z vérifiant l'équation

$$|z - a| = |z - b|$$

est la médiatrice du segment $[AB]$, où A et B sont les points d'affixes a et b respectivement

Proposition : Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. L'ensemble des points d'affixe z vérifiant l'équation

$$\mathrm{Re}(az) = \alpha$$

est une droite (qui passe par le point d'affixe α/a)

Proposition : Tout nombre complexe a deux racines carrées opposées

Exemple : trouver les racines carrées de $3+4i$

On cherche $z = x+iy$ tel que $z^2 = 3+4i$

- $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 3+4i$
- $|z|^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

x et y sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & 3 \\ 2xy & = & 4 \\ x^2 + y^2 & = & 5 \end{cases}$$

D'où les deux solutions : $(x,y) = (2,1)$ et $(x,y) = (-2,-1)$

Pour trouver les racines d'un nombre complexe $a+ib$,
on pose : $(x+iy)^2 = a+ib$

- $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = a+ib$
- $|z|^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$

x et y sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & a & (1) \\ 2xy & = & b & (2) \\ x^2 + y^2 & = & \sqrt{a^2+b^2} & (3) \end{cases}$$

Les équations (1) et (3) permettent de calculer x^2 et y^2
L'équation (2) permet de trouver le signe de x et y (2 solutions possibles)

Exercice : Trouver les racines carrées des nombres complexes $4+3i$ et -4

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0, b, c \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = 0 \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \end{aligned}$$

Les racines sont donc les nombres complexes z tels que $z + \dfrac{b}{2a}$ soit une racine carrée de $\dfrac{\Delta}{4a^2}$

Quand a, b et c sont réels, on a les solutions (complexes) suivantes :

Si $\Delta > 0$, les deux racines sont

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta < 0$, les deux racines sont

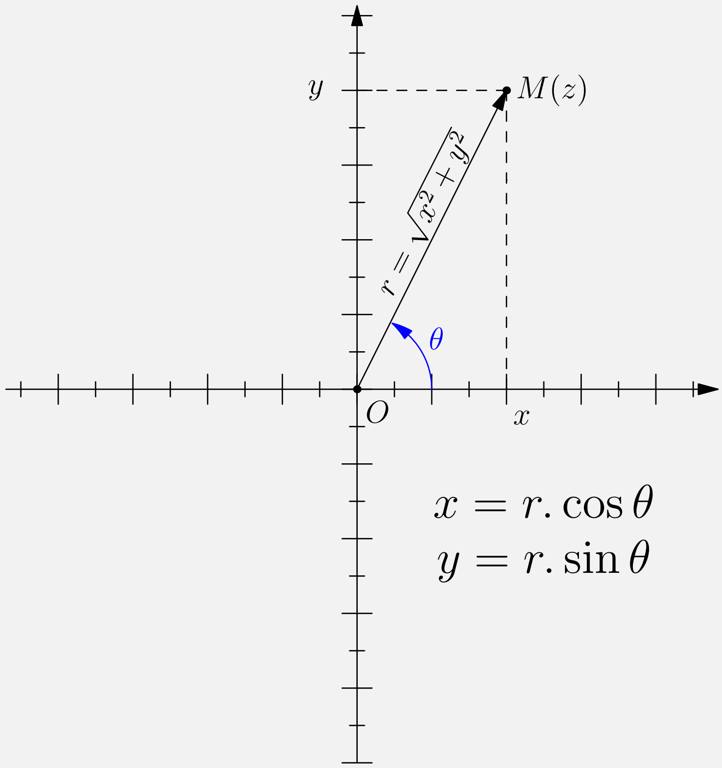
$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$, il y a une racine double

$$z = -\frac{b}{2a}$$

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

$$2z^2 - 2z + 1 = 0 \qquad z^2 + 2z + 5 = 0$$



On dit qu'un réel θ est un argument du nombre complexe $z = x + iy$ ($z \neq 0$) s'il vérifie

$$\begin{cases} \cos\theta & = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta & = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

On a alors

$$z = x + iy = |z|\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

c-à-d

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Un nombre complexe peut s'écrire de deux manières :

1. algébrique : $z = x + iy, \quad x,\ y \in \mathbb{R}$
2. trigonométrique : $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r = |z| \in \mathbb{R}_+, \theta \in \mathbb{R}$

Remarque : tous les $\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sont des arguments de z

$\hookrightarrow$ On appelle argument principal de z l'unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ argument de z

Notation : $\theta = \arg(z)$

Exemples

- $z = 1 + i \qquad r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
  Donc :
  $z = \sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)$
- $z = 3 + i\sqrt{3} \qquad r = |z| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
  Donc :
  $z = 2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) =$
  $2\sqrt{3}\left(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})\right)$
- $z = 1 - i\sqrt{3} \qquad r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$
  Donc :
  $z = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos(\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{3})\right)$

Moyen mnémotechnique

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Exercice : Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

1. $z_1 = -3 + 3i$
2. $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$
3. $z_3 = 3\sqrt{3} - 3i$
4. $z_4 = 8i$
5. $z_5 = -2$

Soit : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\quad z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$$\begin{aligned} zz' &= rr'\left[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')\right] \\ &= rr'\left[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right] \end{aligned}$$

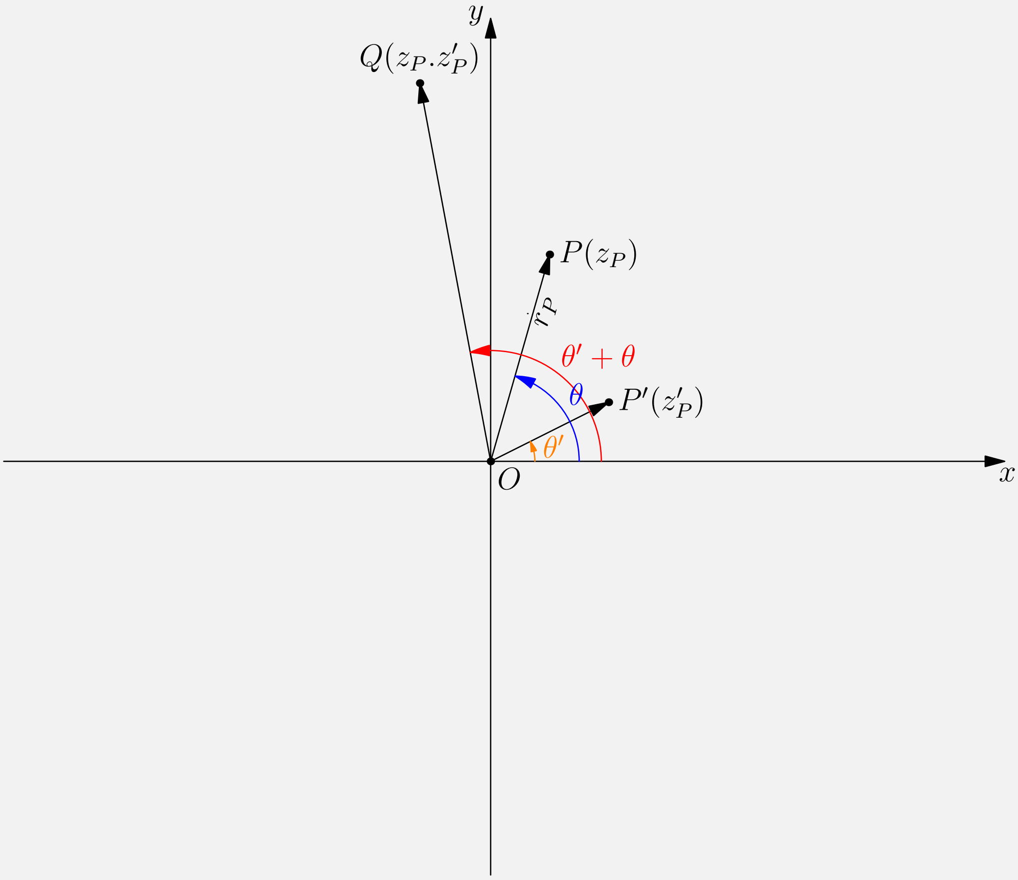
$$\hookrightarrow \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad (2\pi)$$

L'égalité a lieu modulo 2π, c-à-d qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$$

Règle : Pour multiplier deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique,

- on multiplie les modules
- on additionne les arguments (modulo 2π)



- $$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{r(\cos\theta - i\sin\theta)}{r^2} = \frac{r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))}{r^2}$$

$$\hookrightarrow \ \arg\left(z^{-1}\right) = -\arg(z) \quad (2\pi)$$

- $$\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}\left(\cos(\theta' - \theta) + i\sin(\theta' - \theta)\right)$$

$$\hookrightarrow \ \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) \quad (2\pi)$$

Règle : Pour diviser deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique,

- on divise les modules
- on soustrait l'argument du dénominateur de l'argument du numérateur (modulo 2π)

Puissance entière d'un nombre complexe.

Si $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
z^n &= \underbrace{z \times z \times \cdots \times z}_{n \text{ fois}} \\
&= \underbrace{r \times r \times \cdots \times r}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{(\cos\theta + i \sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)\ldots(\cos\theta + i\sin\theta)}_{n \text{ fois}} \\
&= (\ldots) \qquad \text{[récurrence, “formule de Moivre”]} \\
&= r^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big)
\end{aligned}$$

Si $n \in \mathbb{Z}_-^*$, $\quad -n \in \mathbb{N}$,

$$z^n z^{-n} = z^n\big(r^{-n}\big(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\big)\big) = 1$$

$$\begin{aligned}
z^n = \frac{1}{z^{-n}} &= \frac{1}{r^{-n}\big(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\big)} \\
&= r^n\big(\cos(-n\theta) - i\sin(-n\theta)\big) \\
&= r^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big)
\end{aligned}$$

Une conséquence :

$$\hookrightarrow \forall n \in \mathbb{Z},\ \arg(z^n) = n\arg(z) \quad (2\pi)$$

Ecriture trigonométrique et racine carrée

On vient de voir

$$z = r\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big) \implies z^n = r^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big)$$

$\hookrightarrow$ z admet pour racines carrées $\pm\sqrt{r}\big(\cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2)\big)$

Exercice :

1. Mettre sous la forme trigonométrique le nombre complexe $\Delta = 1 + i\sqrt{3}$
2. Trouver un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$
3. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $\dfrac{z^2}{4} + z - i\sqrt{3} = 0$

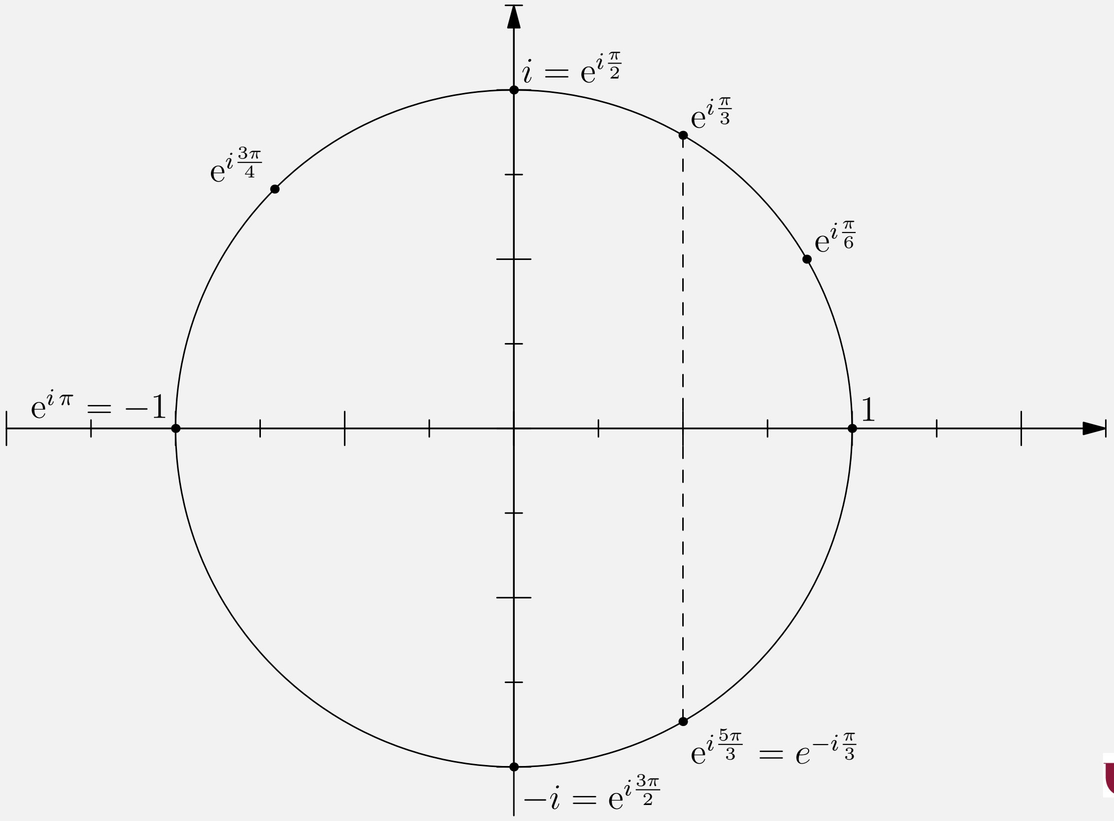
Formule de Moivre :

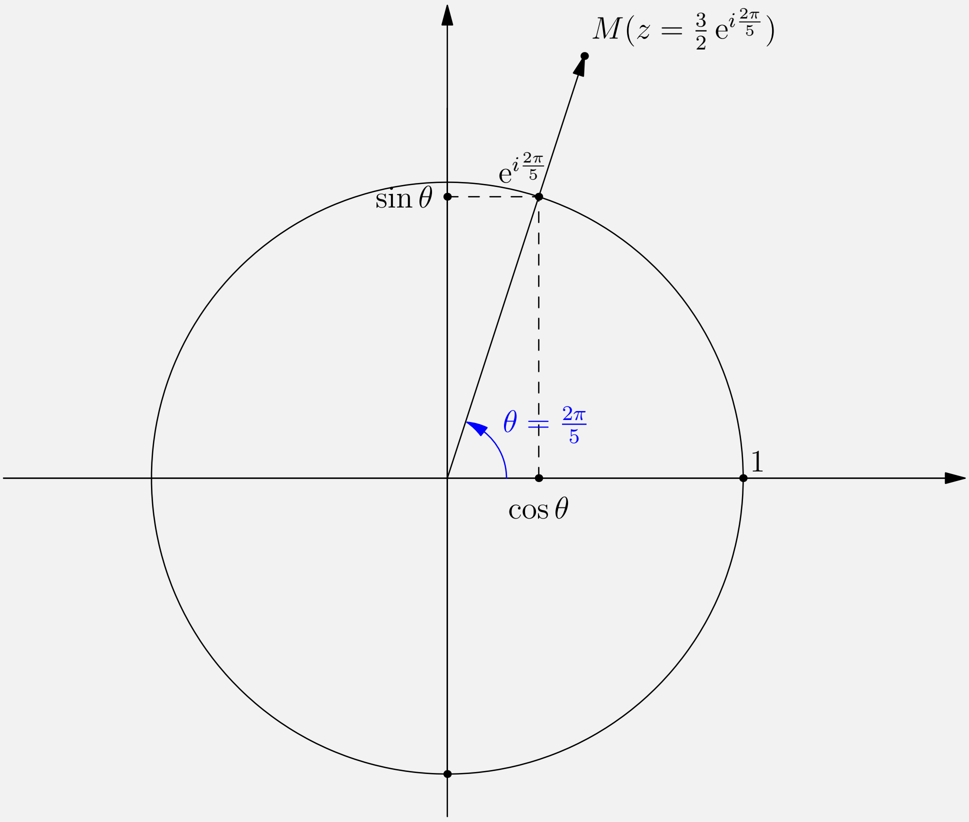
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

- Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit
$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$
Autrement dit, si θ est un argument de z, alors $z = |z|e^{i\theta}$
- Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on définit
$$e^{z} = e^{x}e^{iy}$$

On vérifie alors que pour tous nombres complexes z et z' et tout entier $n \in \mathbb{Z}$,
$$e^{z}e^{z'} = e^{z+z'}$$
$$1/e^{z} = e^{-z}$$
$$e^{z}/e^{z'} = e^{z-z'}$$
$$\left(e^{z}\right)^{n} = e^{nz}$$

Les nombres complexes de module 1





On dispose de 3 écritures pour les nombres complexes :

1. algébrique : $z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$
2. trigonométrique : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in \mathbb{R}$
3. exponentielle : $z = re^{i\theta}, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in \mathbb{R}$

Racine *n-ième* d'un nombre complexe

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

On appelle racine *n-ième* de z tout nombre complexe

$$a = \varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

tel que

$$z = a^n$$

$$z = a^n \iff r(\cos\theta + i\sin\theta) = \varrho^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$$

$$\iff \begin{cases} \varrho^n & = & r \\ n\alpha & = & \theta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \varrho & = & \sqrt[n]{r} \\ \alpha & = & \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

et on peut se limiter aux $k \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n-1$

Théorème : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout nombre complexe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $z \neq 0$, admet n racines *n-ièmes* :

$$a_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

$$0 \leq k \leq n-1$$

Racines *n-ièmes* de l'unité

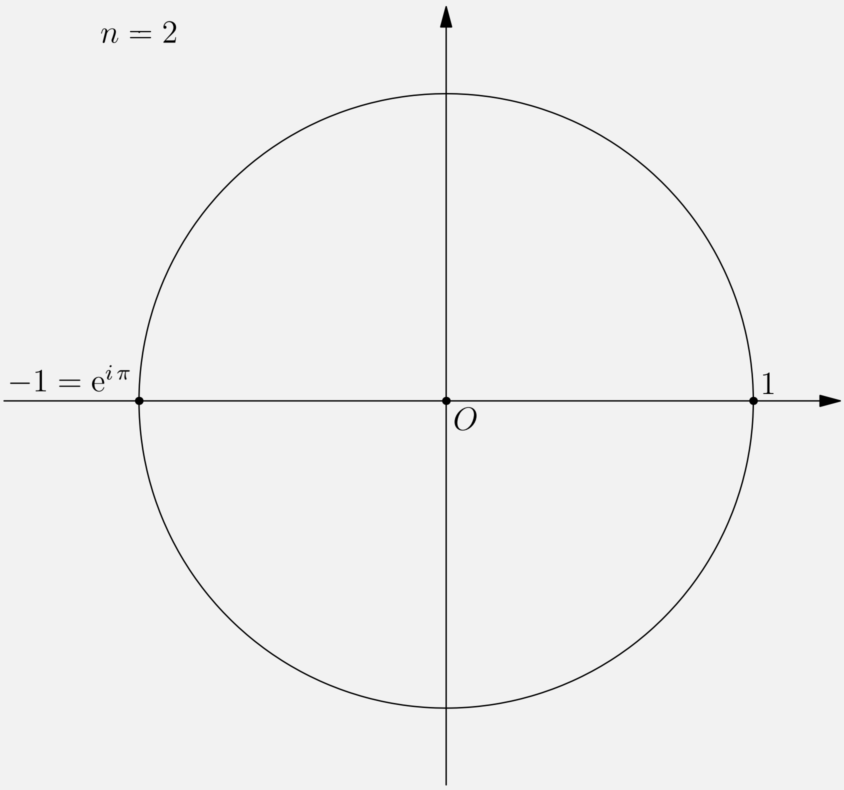
Si $z = 1$: $\quad r = 1, \quad \theta = 0$

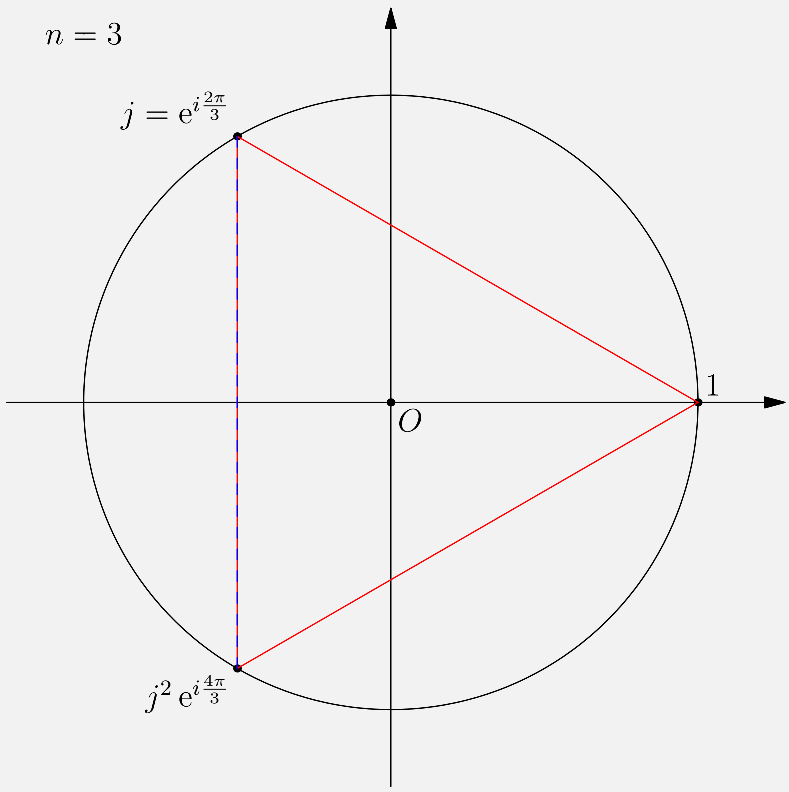
Les nombres complexes

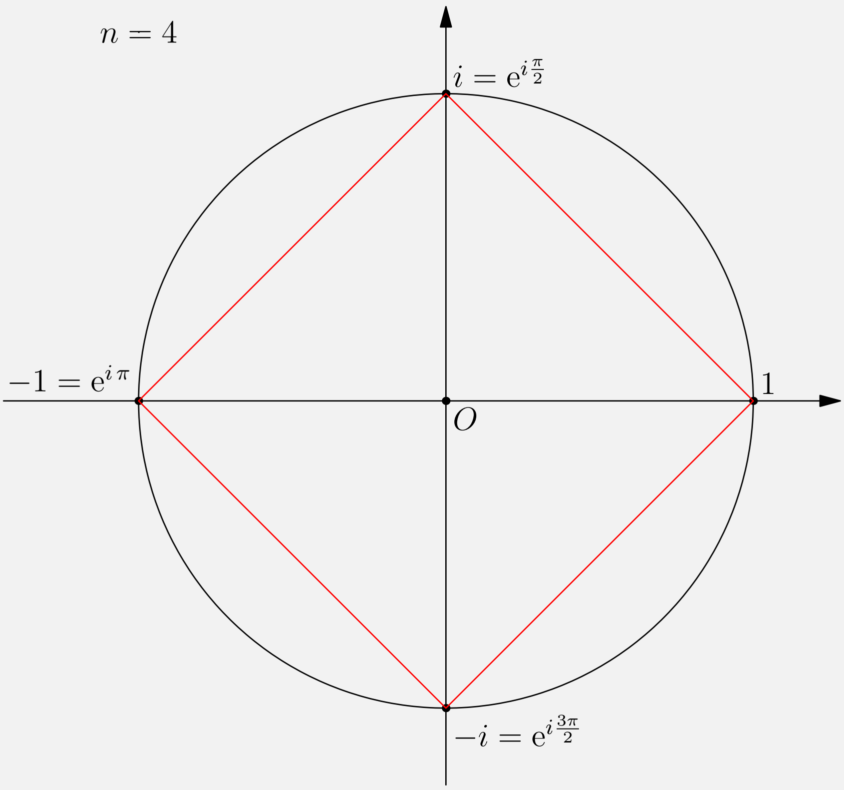
$$\omega_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

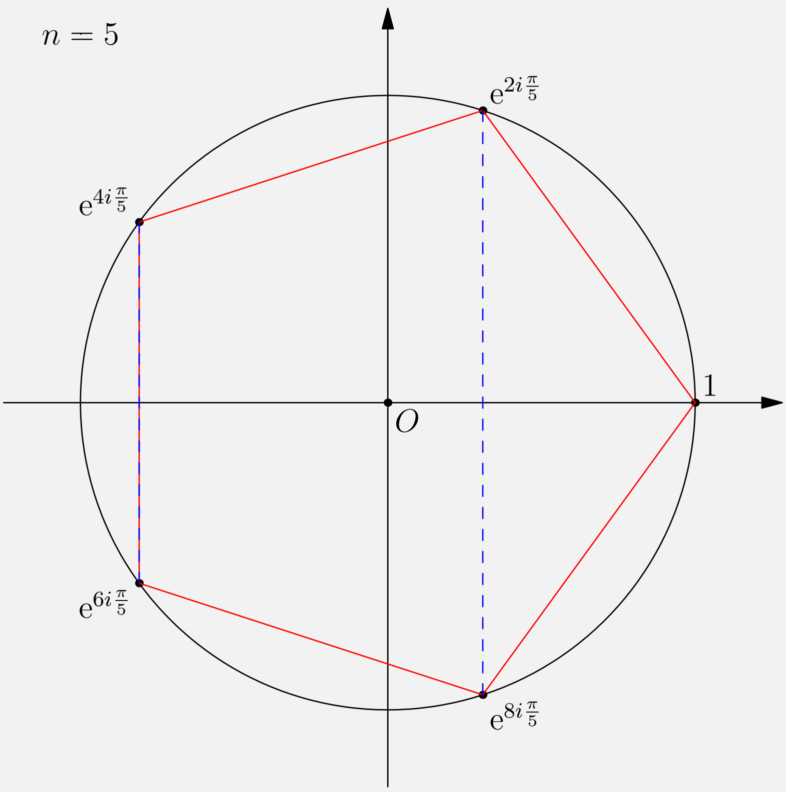
s'appellent les racines *n-ièmes* de l'unité

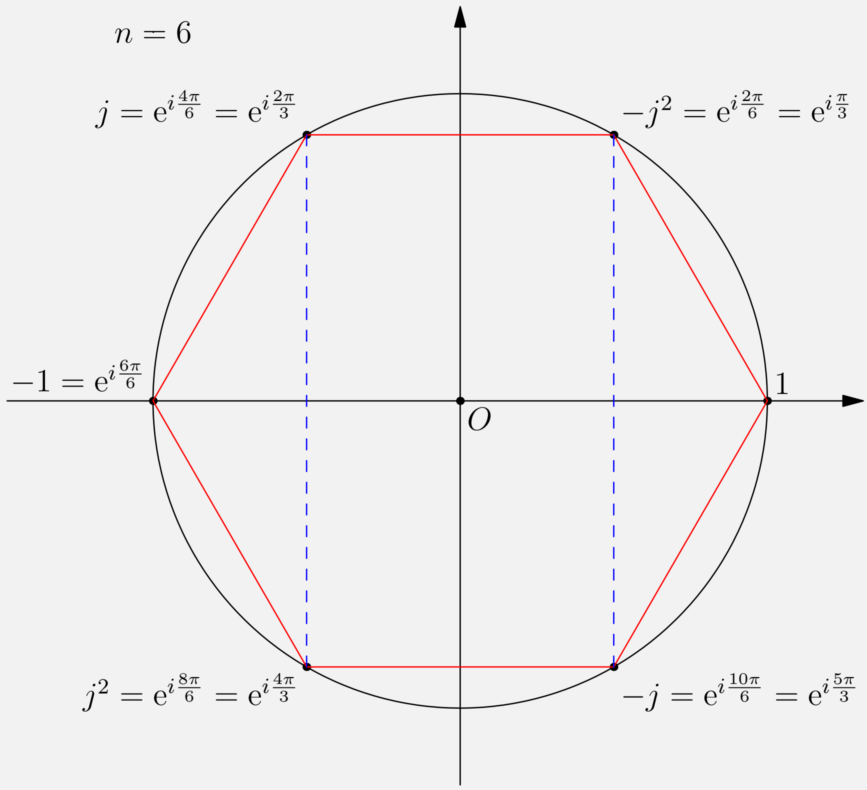
On a, pour tout $k = 0, \ldots, n-1$, $\omega_k = \omega_1^k$ et $\omega_k^n = 1$


$n = 2$
$-1 = \mathrm{e}^{i\pi}$
1
O

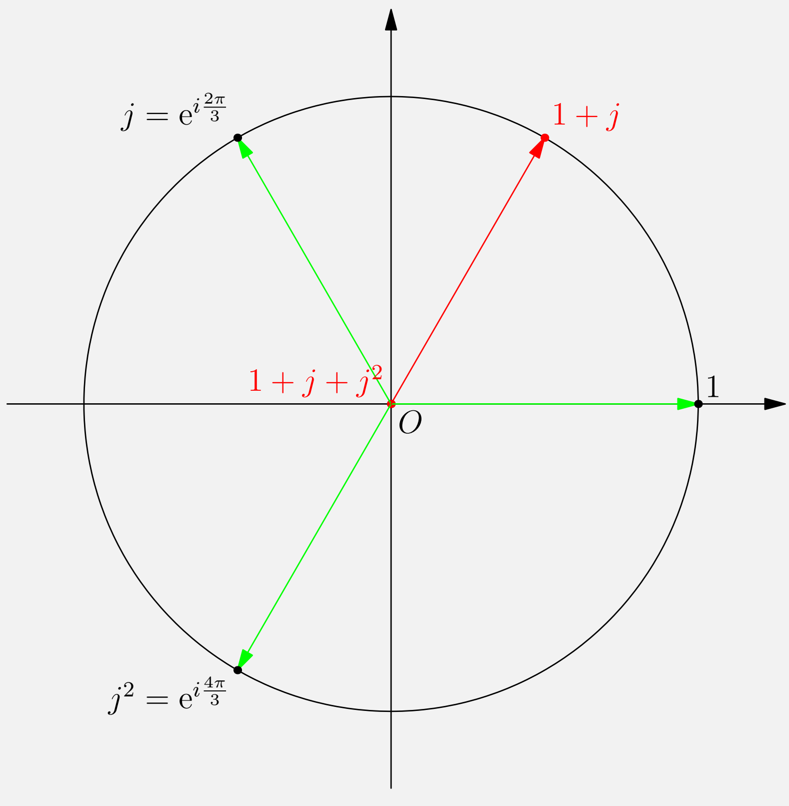

$n = 3$
$j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$
1
O
$j^2\ \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}}$


$n = 4$
$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$
$-1 = e^{i\pi}$
1
O
$-i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$


$n = 5$
$e^{2i\frac{\pi}{5}}$
$e^{4i\frac{\pi}{5}}$
1
O
$e^{6i\frac{\pi}{5}}$
$e^{8i\frac{\pi}{5}}$



Somme des racines *n*-ièmes de l'unité



Pour $n = 3$,

$$1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3}{1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}} = 0$$

Pour $n \geq 1$ quelconque,

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

La somme des racines *n-ièmes* de l'unité est nulle

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}$ et a et b deux racines *n-ièmes* de z :

$$a^n = b^n = z$$

Alors

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = \omega_k \quad \Leftrightarrow \quad a = b.\omega_k$$

où $\omega_k (0 \leq k \leq n-1)$ est une racine *n-ième* de l'unité

Théorème : On obtient les n racines *n-ièmes* d'un nombre complexe en multipliant l'une d'entre elles par les n racines *n-ièmes* de l'unité

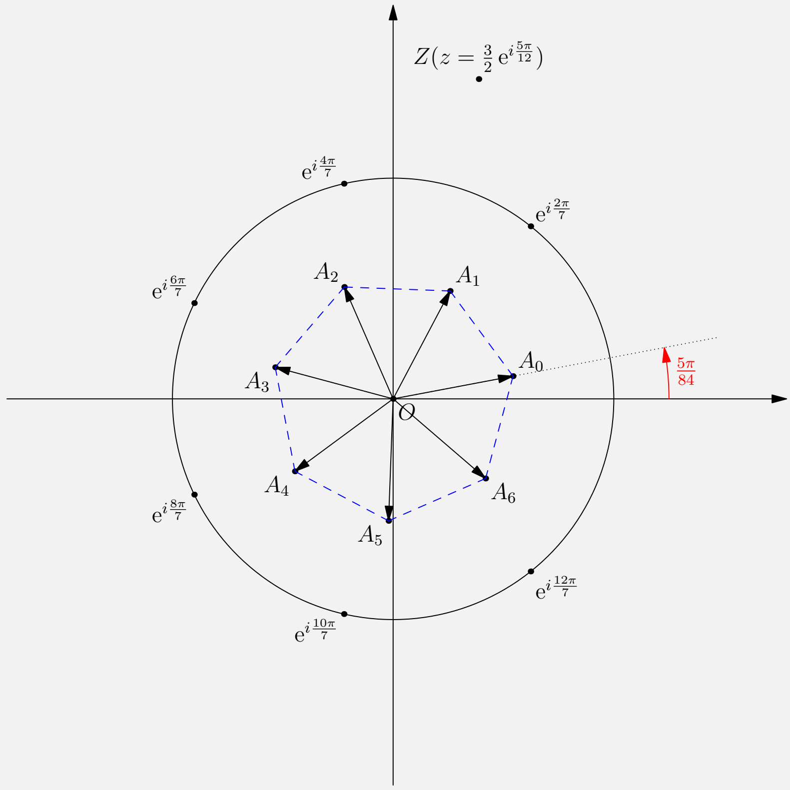
Exemple : soit à calculer les racines 7-*ièmes* de $z = \frac{3}{2} e^{i\frac{5\pi}{12}}$

On doit trouver a tel que $a^7 = z$:

$$|a| = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} \qquad a_0 = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{5\pi}{7\times 12}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{5\pi}{84}}$$

Les autres racines sont obtenue en multipliant a_0 par les six racines 7-*ièmes* de l'unité (différentes de 1) :

- $a_1 = a_0 e^{i\frac{2\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{2\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{29\pi}{84}}$
- $a_2 = a_0 e^{i\frac{4\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{4\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{53\pi}{84}}$
- $a_3 = a_0 e^{i\frac{6\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{6\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{77\pi}{84}}$
- $a_4 = a_0 e^{i\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{8\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{101\pi}{84}}$
- $a_5 = a_0 e^{i\frac{10\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{10\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{125\pi}{84}}$
- $a_6 = a_0 e^{i\frac{12\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{12\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{149\pi}{84}}$



Exercice : Donner les trois racines cubiques du même nombre complexe $z = 1 + i$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ défini par $\quad z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$:

$$\mathrm{Re}(z) = \cos\theta = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\mathrm{Im}(z) = \sin\theta = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad ; \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

Transformation de $\cos^n \theta$ et $\sin^n \theta$ en une somme des sinus et cosinus des multiples de θ

$\hookrightarrow$ Utilité :

primitives des fonctions $\cos^n \theta$ et $\sin^n \theta$: inconnues

primitives des fonctions $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$: connues

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$\begin{aligned}
2^3 \cos^3 \theta &= \left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^3 \\
&= e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta} \\
&= \left(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}\right) + 3\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \\
&= 2\cos(3\theta) + 6\cos(\theta)
\end{aligned}$$

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$$

- on écrit : $2^n \cos^n \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n$
- on développe $(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n$ avec la formule du binôme
- on regroupe chaque $e^{ki\theta}$ avec son conjugué $e^{-ki\theta}$

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$\begin{aligned}(2i)^3 \sin^3\theta &= \left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^3 \\ &= e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta} \\ &= \left(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}\right) - 3\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) \\ &= 2i\sin 3\theta - 6i\sin\theta\end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \sin^3\theta = -\frac{1}{4}\sin(3\theta) + \frac{3}{4}\sin(\theta)$$

Exercice : Linéariser $\cos^4\theta$ et $\sin^4\theta$

Trigonométrie

Calcul des sinus et cosinus de $n\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right)$$

$$\sin(n\theta) = \mathrm{Im}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right)$$

Trigonométrie

Calcul des sinus et cosinus de $n\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

$$\begin{aligned}\cos(4\theta)+i\sin(4\theta) &= (\cos\theta+i\sin\theta)^4\\ &= (\cos\theta)^4+4\,i\,(\cos\theta)^3\sin\theta\\ &\quad+6\,i^2\,(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2+4\,i^3\,(\cos\theta)(\sin\theta)^3\\ &\quad+i^4\,(\sin\theta)^4\end{aligned}$$

$$\cos(4\theta)=(\cos\theta)^4-6\,(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2+(\sin\theta)^4$$

$$\sin(4\theta)=4\,(\cos\theta)^3(\sin\theta)-4\,(\cos\theta)(\sin\theta)^3$$

Exercice : Calculer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Trigonométrie (suite)

On montre de même avec la formule d'Euler, que pour tous a et b réels :

$$\sin a+\sin b=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

$$\sin a-\sin b=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

$$\cos a+\cos b=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

$$\cos a-\cos b=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

moyen mnémotechnique : “si co co si co co moins si si”

Trigonométrie (suite)

On peut se contenter de mémoriser

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

et de retrouver les autres en changeant a en $\frac{\pi}{2} - a$ et b en $\frac{\pi}{2} \pm b$ ou $\pi + b$ selon les cas, puisque

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \text{et} \quad \cos(\pi + x) = -\cos x.$$

Polynômes

Définition : On appelle polynôme à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$) une suite finie de coefficients $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{K}$ que l'on écrit sous la forme $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$

Vocabulaire et propriétés :

- un terme $a_k X^k$ ($a_k \neq 0$) est appelé monôme de degré k
- le degré du polynôme est celui de son monôme de plus haut degré (appelé terme dominant)
- les opérations usuelles $P + Q$ et $P \times Q$ munissent l'ensemble des polynômes d'une “structure naturelle d'anneau”
- le symbole X est appelée variable ou indéterminée du polynôme
- on note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, d'indéterminée X ($\rightarrow$ ensembles $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$, ...)

Racines et factorisation

Théorème : Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, de degré $n \geq 0$, et $\alpha \in \mathbb{K}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $P(\alpha) = 0$ (on dit que α est une racine de P)

(ii) il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $P = (X - \alpha) \times Q$

Le polynôme Q s'obtient de proche en proche, en commençant par le terme de plus haut degré. Par exemple si $P = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$, on a $P(2) = 0$ donc on peut écrire

$$\begin{aligned} P &= (X-2)(X^2 + \dots) \text{ (on identifie le terme en } X^3) \\ &= (X-2)(X^2 - X + \dots) \text{ (on identifie le terme en } X^2) \\ &= (X-2)(X^2 - X + 1) \text{ (on identifie le terme en } X) \end{aligned}$$

Racines multiples

Définition : Si α est une racine de P, on appelle multiplicité de α le plus grand entier k tel que l'on puisse factoriser P sous la forme $P = (X-\alpha)^k Q$ (avec Q polynôme, $Q \neq 0$)

Exemple : Le polynôme $X^3(X-1)(X-2)^2$ admet 3 racines : 0 (de multiplicité 3), 1 (racine simple), et 2 (racine double)

Définition : Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$ un polynôme sur $\mathbb{K}$. On appelle polynôme dérivé de P (noté P') le polynôme

$$P' = a_1 + 2a_2 X + \dots + na_n X^{n-1}$$

En itérant le processus, on définit ainsi les dérivées successives P', P'', $P^{(3)}$, etc.

Théorème : $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de multiplicité k de P ssi $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$

$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 = 0$

Théorème de d'Alembert

Théorème : Tout polynôme non-constant à coefficients complexes a au moins une racine complexe.

Corollaire : Tout polynôme de degré $n \geq 1$, à coefficients complexes, admet exactement n racines complexes (comptées autant de fois que leur multiplicité)

Corollaire : Tout polynôme P de degré $n \geq 1$, à coefficients complexes, peut s'écrire sous la forme

$$P = C(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\ldots(X-\alpha_n),$$

où C est le coefficient dominant de P et les complexes α_i sont les racines de P, comptées autant de fois que leur multiplicité

Calcul des racines d'un polynôme

Si P est un polynôme de degré 1 ($P = a_0 + a_1X$), il admet $-a_0/a_1$ comme unique racine.

Si P est un polynôme de degré 2, ses 2 racines complexes (éventuellement confondues) peuvent se calculer explicitement à l'aide de racines carrées (formules usuelles avec le discriminant)

Si P est un polynôme de degré 3 ou 4, on dispose de formules du même genre (mais beaucoup plus compliquées) qui décrivent les racines de P

En revanche, le théorème d'Abel (hors programme) affirme qu'il n'existe pas de telles formules générales lorsque le degré de P est au moins égal à 5. On est alors contraint d'avoir recours au calul numérique approché (méthode de dichotomie, de Newton, etc.).

Suites

- Définitions et exemples
- Convergence des suites
- Opérations sur les limites
- Comparaison de suites
- Exemples importants
- Suites monotones
- Suites adjacentes
- Suites extraites
- Suites récurrentes
- Suites négligeables, notation $o()$
- Suites équivalentes
- Exemples de calculs d'équivalents

Une suite de nombres réels est un ensemble de nombres réels numérotés :

t.g.

$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 3,\ u_4 = 4,\ \ldots \qquad u_n = n$

$u_0 = 0,\ u_1 = 2,\ u_2 = 4,\ u_3 = 6,\ u_4 = 8,\ \ldots \qquad u_n = 2n$

$u_0 = 1,\ u_1 = 3,\ u_2 = 5,\ u_3 = 7,\ u_4 = 9,\ \ldots \qquad u_n = 2n+1$

$u_1 = \frac{1}{1},\ u_2 = \frac{1}{2},\ u_3 = \frac{1}{3},\ u_4 = \frac{1}{4},\ u_5 = \frac{1}{5},\ \ldots \qquad u_n = \frac{1}{n}$

$u_0 = 0,\ u_1 = \frac{\sin(1)}{2},\ u_2 = \frac{\sin(2)}{5},\ u_3 = \frac{\sin(3)}{10},\ \ldots \qquad u_n = \frac{\sin(n)}{n^2+1}$

Définition. Une suite à valeurs dans E est une application de $\mathbb{N}$ dans un ensemble E

Pour une suite $u : \mathbb{N} \to E$, on note u_n plutôt que $u(n)$ le terme de rang n, et la suite u est souvent notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n)

L'ensemble des suites à valeurs dans E est noté $E^{\mathbb{N}}$

E peut être un ensemble quelconque : nombres, polynômes, fonctions, matrices, suites, etc.

Exemples : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = n^2 + 1$$

$$u_n = e^{\frac{i\pi}{n}}$$

$$P_n = X^2 - nX + n^2$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sin(nx)$$

On se limitera ici aux suites numériques ($E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Exemples de suites

- Suite définie explicitement : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = (-1)^n, \quad u_n = \frac{1+i}{1+2^n}, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

- Suite définie par récurrence :
  - $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$
  - suite de Collatz : $u_0 \in \mathbb{N}^*$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \begin{cases} u_n/2 & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

  - suite de Fibonacci : $u_0 = 0, u_1 = 1$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Suites arithmétiques

Une suite arithmétique de raison r ($r \in \mathbb{C}$) est définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{C}$ et la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

Elle vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr$$

Par ailleurs, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_0 + u_1 + \dots u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

(le nombre de termes multiplié par la moyenne des extrêmes)

Suites géométriques

Une suite géométrique de raison r ($r \in \mathbb{C}$) est définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{C}$ et la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = r\, u_n$$

Elle vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0\, r^n$$

Par ailleurs, si $r \neq 1$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_0 + u_1 + \ldots u_n = u_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

On dit qu'une suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

- croissante si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$
- strictement croissante si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$
- décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$
- strictement décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$
- monotone si (u_n) est soit croissante, soit décroissante
- strictement montone si (u_n) est soit strictement croissante, soit strictement décroissante
- constante si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0$
- majorée (par M) si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$
- minorée (par m) si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$
- bornée si (u_n) est à la fois majorée et minorée
- périodique s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$

Exercice : Pour chaque suite dont on donne le t.g. ci-dessous, étudier la monotonie et le caractère majoré, minoré et périodique.

$$u_n = -3n+2, \qquad u_n = \sqrt{n},$$

$$u_n = n(20-n), \qquad u_n = \frac{1}{n^2+1},$$

$$u_n = E\left(\frac{n}{2}\right), \qquad E(x) : \text{partie entière de } x,$$

$$u_n = (-1)^n, \qquad u_n = n(-1)^n,$$

$$u_n = \sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right), \qquad u_n = n + \sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right)$$

Définition. On dit qu'une suite (u_n) vérifie la propriété (P) à partir d'un certain rang s'il existe un entier $N \geq 0$ tel que la suite extraite $(u_{N+n})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (P)

Exemples :

- la suite des décimales de $1/6 = 0,1666666\ldots$ est constante à partir d'un certain rang
- la suite des décimales de $1/22 = 0,00454545\ldots$ est périodique à partir d'un certain rang
- la suite de t. g. $u_n = 20n - n^2$ est décroissante à partir d'un certain rang (exercice : le montrer !)

Définition d'une suite convergente

Définition intuitive : la suite (u_n) converge vers la limite L si pour tout $\varepsilon > 0$ (aussi petit que l'on veut), la suite (u_n) prend ses valeurs dans l'intervalle $[L-\varepsilon, L+\varepsilon]$ à partir d'un certain rang (qui dépend de ε bien sûr)

Définition. On dit que la suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a pour limite $L \in \mathbb{R}$ (ou converge vers L) si

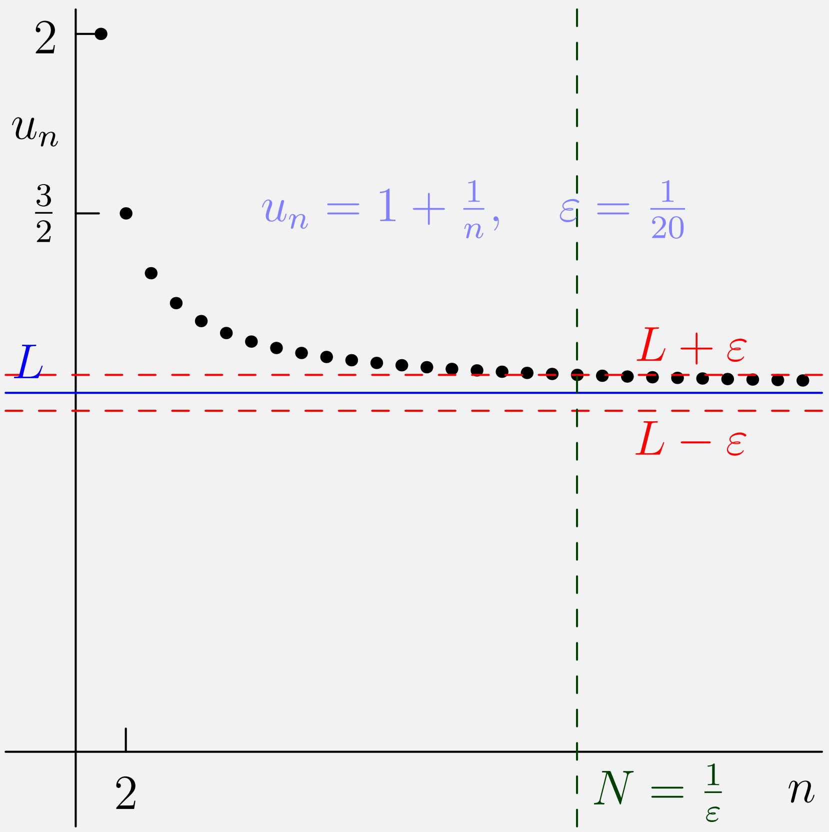
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon$$

Remarque :

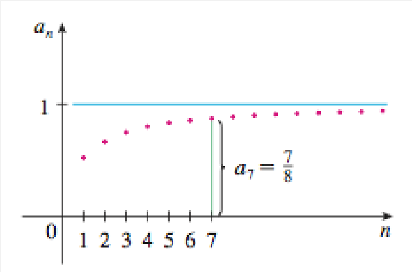
$$|u_n - L| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon \leq u_n - L \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$, ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$, ou $\lim u_n = L$

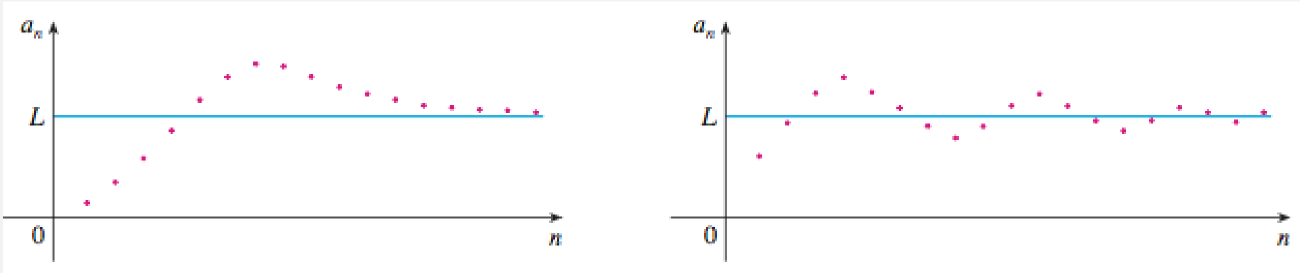
Limite



Exemples de suites convergentes



La suite (a_n) de t. g. $a_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$



Suites (a_n) convergentes non monotones

Unicité de la limite

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon$$

Théorème : Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L, alors cette limite est unique

- soient L et L' deux limites de la suite (u_n)
- pour tout $\varepsilon > 0$ on a
$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon$$
$$\exists N' \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N', \quad |u_n - L'| \leq \varepsilon$$
- on a alors, pour $n \geq \max(N, N')$,
$$|L - L'| = |L - u_n + u_n - L'| \leq |L - u_n| + |u_n - L'| \leq 2\varepsilon$$
- cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $|L - L'| = 0$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon$$

Exercice : Montrer que la suite de t. g. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ a pour limite 0.

Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} \leq \varepsilon^2 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Pour $N = E\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) + 1$, on a donc

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - 0| \leq \varepsilon$$

et par conséquent (u_n) converge vers 0

Propriété des suites convergentes

Proposition : Toute suite convergente est bornée

Soit (u_n) une suite convergente :

- pour $\varepsilon = 1$, on a : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad L - 1 \leq u_n \leq L + 1$
- on pose alors

$$m = \min\{u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, L - 1\}$$
$$M = \max\{u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, L + 1\}$$

  et l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad m \leq u_n \leq M$$

Une suite qui ne converge pas est appelée suite divergente

Exemples : suites de termes généraux

$$u_n = n, \qquad v_n = (-1)^n, \qquad w_n = n(-1)^n$$

$\longrightarrow$ une suite bornée n'est pas nécessairement convergente !

Remarque : (u_n) est divergente mais admet une limite infinie

Définition. On dit que la suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ ($\lim u_n = +\infty$) si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad u_n \geq A$$

Définition. On dit que la suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ ($\lim u_n = -\infty$) si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad u_n \leq A$$

Limites et opérations (1)

Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L'$, alors :

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda L$
- $u_n + v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L + L'$
- $u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} LL'$
- si $L \neq 0, \quad \dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{L}$

Limites et opérations (2)

Proposition. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et (v_n) est bornée, alors $u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$

- (v_n) est bornée donc : $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M$
- parce que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$: $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}$
- par conséquent : $\forall n \geq N, |u_n v_n| \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

On a donc bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n v_n| \leq \varepsilon$$

Limites et opérations (3)

Théorème. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ et f est une fonction continue en L,

$$\text{alors} \quad f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(L)$$

Exercice : Trouver la limite de la suite de t. g.

$$u_n = \cos(n)\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

- la suite de t. g. $(-1)^n$ est bornée, la suite de t. g. $\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge vers 0 ; donc la suite de t. g. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge vers 0
- par conséquent la suite de t. g. $\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ converge aussi vers 0 car $\sin(0) = 0$ et $\sin$ est continue sur $\mathbb{R}$
- la suite de t.g. $\cos(n)$ est bornée et la suite de t.g. $\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ converge vers 0, donc la suite (u_n) converge vers 0

Exercice : Trouver la limite de la suite de t.g.

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^{4/3}}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

Exercice : Étudier la convergence de la suite définie par

$$u_n = \frac{\cos(n^2)+n}{n\tan\left(\frac{1}{n}\right)+\sqrt{n^2+1}}$$

Exercice : Soit une suite (u_n) qui converge vers $L \neq 0$.

Montrer que (u_n) est non nulle à partir d'un certain rang, c-à-d que : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad u_n \neq 0$

- si $L > 0$: $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \ |u_n - L| \leq \frac{L}{2}$

  en particulier : $L - \dfrac{L}{2} \leq u_n$, donc $u_n \geq \frac{L}{2} > 0$.

- si $L < 0$: on applique le résultat précédent à la suite de t.g. $v_n = -u_n$, qui converge vers $-L > 0$

Limites infinies et opérations (1)

- $\lim_{n\to\infty} u_n = \pm\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0^+ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$

(rappel : $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0^+ \iff u_n \to 0$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang)

- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0^- \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = -\infty$

Exercice : Donner les limites des suites dont les termes généraux sont

$$u_n = \frac{1}{\ln(n+2)} \quad ; \quad v_n = \frac{1}{\sin(1/n)}.$$

Limites infinies et opérations (2)

- $(u_n \longrightarrow +\infty$ et $v_n \longrightarrow L$ fini ou $+\infty) \Rightarrow u_n + v_n \longrightarrow +\infty$
- $(u_n \longrightarrow +\infty$ et $v_n \longrightarrow L$ fini > 0 ou $+\infty) \Rightarrow u_n v_n = +\infty$
- (résultats analogues pour les limites $-\infty$).

Exercice : Donner les limites des suites dont les termes généraux sont

$$u_n = \ln(n+1)\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad ; \quad v_n = n^2 + \sin(n).$$

Formes indéterminées (lorsqu'on ne peut pas conclure directement) :

$$(+\infty) - (+\infty) \qquad (-\infty) - (-\infty) \qquad (+\infty) + (-\infty)$$

$$0 \times \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

Limites et inégalités

Soient deux suites (u_n) et (v_n)

- si $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si (u_n) et (v_n) convergent, alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n$$

en particulier, si (u_n) converge et si $u_n \geq a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

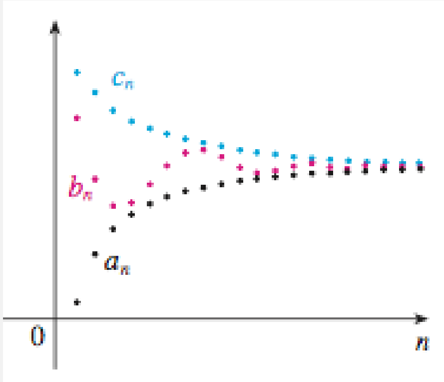
alors $\lim_{n\to\infty} u_n \geq a$

Attention : même si $u_n > a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la conclusion est seulement $\lim_{n\to\infty} u_n \geq a$

Exemple : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n} > 0$ mais $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Théorème des gendarmes

Soient trois suites, (a_n), (b_n) et (c_n) vérifiant :



- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq b_n \leq c_n$
- (a_n) et (c_n) convergent
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$

Alors (b_n) converge et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$

Exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Soient (u_n) et (v_n) de t.g. $u_n = \dfrac{-1}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{1}{n^2}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq v_n \leq w_n$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 = \lim_{n\to\infty} w_n$$

donc, d'après le théorème des gendarmes, $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Exercice : Donner les limites des suites de termes généraux suivants :

1. $u_n = \dfrac{3n+6+(-1)^n}{5n+5}$
2. $v_n = \dfrac{\sin(n\pi/6)}{n^2}$
3. $w_n = \dfrac{n^3+2n^2((-1)^n+4)+5n-1}{3n^3+n^2+4n+1}$

Théorème : Soient (u_n) et (v_n) des suites telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leq v_n.$$

Alors

$$\lim u_n = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim v_n = +\infty$$

et

$$\lim v_n = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim u_n = -\infty$$

Exercice : Prouver ce théorème.

Exercice : Donner les limites des suites de t.g. suivants :

1. $u_n = n^2 + (-1)^n$
2. $v_n = -n^4 + 5n^2 \cos\left(\dfrac{2\pi n}{7}\right)$

Limites et valeurs absolues

Proposition : Si $\lim_{n\to\infty} u_n = L$, alors $\lim_{n\to\infty} |u_n| = |L|$

car la fonction $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$

Attention : $(|u_n|)$ peut être convergente sans que (u_n) le soit !

Exemple : t.g. $u_n = (-1)^n$

Théorème : Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $(|v_n|)$ converge vers 0, alors $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$

- soient les suites de t.g. $u_n = -|v_n|$ et $w_n = |v_n|$
- on a $u_n \leq v_n \leq w_n$
- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0 = \lim_{n\to\infty} w_n$

donc, d'après le théorème des gendarmes, $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Suite arithmétique

Proposition. Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r $(u_n = u_0 + nr)$

- si $r > 0$, $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$
- si $r < 0$, $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$
- si $r = 0$, $\lim_{n\to\infty} u_n = u_0$

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la suite de t.g. $u_n = a^n$

1. si $a > 1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$
2. si $|a| < 1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$
3. si $a = 1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$
4. si $a \leq -1$, a^n n'est pas convergente

si $a > 1$: $a = 1 + h, \quad h > 0$

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k = 1 + n.h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k}_{>0} \geq 1 + n.h$$

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la suite de t.g. $u_n = a^n$

1. si $a > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$
2. si $|a| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$
3. si $a = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$
4. si $a \leq -1$, a^n n'est pas convergente

si $|a| < 1$ et $a \neq 0$: $\dfrac{1}{|a|} > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{|a|}\right)^n = +\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty} |a|^n = 0$

si $a = 0$, $a^n = 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la suite de t.g. $u_n = a^n$

1. si $a > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$
2. si $|a| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$
3. si $a = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$
4. si $a \leq -1$, a^n n'est pas convergente

si $a < -1$, $|a| > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} |a|^n = +\infty$ a^n n'est pas bornée

si $a = -1$, $a^n = (-1)^n$

Exercice : Montrer que

$$0.99999999\cdots\cdots = 1.$$

Qu'en déduisez-vous ?

Exercice : Donner la limite de la suite de t.g. $u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right)^n$.

Exercice : Soit les suites de t.g.

$$u_n = 2^n \qquad v_n = 6^n.$$

Donner les limites de (u_n), de (v_n), de $(u_n v_n)$ et de $(u_n + v_n)$. Donner ensuite la limite de (u_n/v_n) pour en déduire la limite de $(u_n - v_n)$.

Suites (u_n) telles que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \alpha < 1$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\quad 0 < \alpha < 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq 0 \quad \text{et} \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \alpha$$

Alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

- $\left|\frac{u_n}{u_0}\right| = \left|\frac{u_1}{u_0}\right|\left|\frac{u_2}{u_1}\right|\left|\frac{u_3}{u_2}\right|\cdots\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \prod_{k=1}^{n}\left|\frac{u_k}{u_{k-1}}\right| \leq \alpha^n$
- $|u_n| \leq \alpha^n |u_0|$
- $\alpha < 1, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$

$$a \neq 0, \quad u_n = \frac{a^n}{n!}$$

- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$
- soit $N = E(2|a|)$ (N entier, et $N+1 \geq 2|a|$)
- pour $n \geq N$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|a|}{n+1} \leq \frac{|a|}{N+1} \leq \frac{1}{2}$
- $\left|\frac{u_n}{u_N}\right| = \left|\frac{u_{N+1}}{u_N}\right|\left|\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}\right|\cdots\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \prod_{k=N+1}^{k=n}\left|\frac{u_k}{u_{k-1}}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2^N$
- $|u_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2^N \times |u_N|$ or $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$

$$u_n = \frac{n^n}{n!}$$

- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e > 2$

  donc $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 2$
- $\forall n \geq N, \quad u_n = u_N \times \frac{u_{N+1}}{u_N} \times \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \dots \frac{u_n}{u_{n-1}} \geq u_N \times 2^{n-N} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Ou, plus simplement : $n! = 1 \times 2 \times 3 \ldots \times n \leq 1 \times n^{n-1}$

donc $u_n = \frac{n^n}{n!} \geq \frac{n^n}{n^{n-1}} = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Exercice : Donner les limites des suites définies par les t. g. suivants :

1. $u_n = 3^n$
2. $v_n = (0,5)^n$
3. $w_n = 2^n + 5^n$
4. $x_n = 2^n - 5^n$
5. $y_n = 2^n - \frac{5^n}{n!}$
6. $z_n = (-0,2)^n - 5^n$
7. $t_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2^n + 1}$

Étude de la monotonie

Deux méthodes classiques pour étudier la croissance (ou la décroissance) d'une suite (u_n) :

méthode 1 : étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

méthode 2 (si $u_n > 0$) : calculer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

- si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (u_n) est croissante
- si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (u_n) est décroissante

Exemple 1 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \ln(n+1) - \ln(n).$$

On a
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \big(\ln(n+2) - \ln(n+1)\big) - \big(\ln(n+1) - \ln(n)\big) \\ &= \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right) \end{aligned}$$

Or $\dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1$ donc $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right) < 0$

donc la suite (u_n) est décroissante

Exemple 2 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = ne^{-\frac{1}{n!}} > 0 :$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)\,e^{-\frac{1}{(n+1)!}}}{ne^{-\frac{1}{n!}}} \\ &= \frac{n+1}{n}\,e^{\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}} \\ &= \frac{n+1}{n}\,e^{\frac{n}{(n+1)!}} > 1 \end{aligned}$$

donc la suite (u_n) est croissante

Exercice : Donner la monotonie des suites de t. g. suivants :

1. $u_n = \dfrac{3}{n+5}$,
2. $v_n = \dfrac{n}{n^2+1}$,
3. (w_n) définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = w_n + w_n^2$,
4. (x_n) définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n^2}$

Exercice : Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Etudier la monotonie de (u_n).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n^2$.
3. Donner la limite de (u_n).

Propriété de la borne supérieure

Définition : On dit qu'un réel b est la borne supérieure d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ si b est le plus petit des majorants de E, autrement dit si :

1. b est un majorant de E : $\quad \forall x \in E, \quad x \leq b$
2. tout réel $b' < b$ n'est pas un majorant de E :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in E, \quad x > b - \varepsilon$$

Lorsqu'elle existe, la borne supérieure est unique et notée $\sup E$ ou $\sup\limits_{x \in E} x$

Théorème : Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure

Si E n'est pas majorée, on note souvent $\sup E = +\infty$

Borne supérieure et borne inférieure

On définit de même la borne inférieure de toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. C'est le plus grand des minorants de E, et on le note $\inf E$ ou $\inf\limits_{x \in E} x$

Exemples : Calculer

1. $\sup\,[0,1]$
2. $\sup\,[0,1[$
3. $\inf\,]1,+\infty[$
4. $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n}$
5. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n}$
6. $\sup\,\big([0,1]\cap\mathbb{Q}\big)$

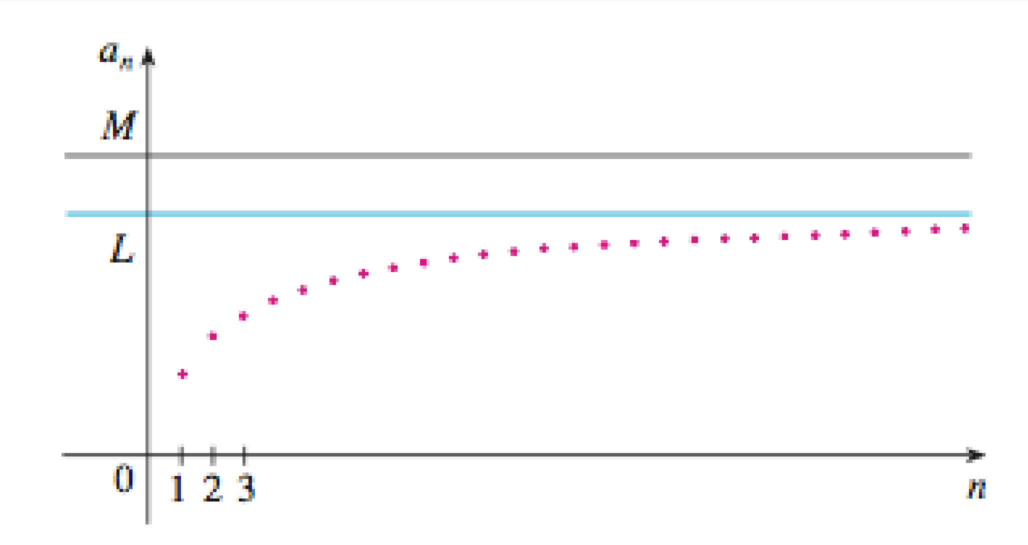
Université Paris Cité

Limites et monotonie

Théorème :

- Une suite croissante et majorée converge
- Une suite décroissante et minorée converge
- Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$
- Une suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$

Université Paris Cité



Suite (a_n) croissante et majorée

Limites et monotonie

Une suite croissante et majorée converge

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et $A = \{u_n : \ n \in \mathbb{N}\}$

- $A \neq \emptyset$
- la suite est majorée ($\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$), donc A est une partie majorée de $\mathbb{R}$

  $\longrightarrow$ A admet une borne supérieure L
- $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad L - \varepsilon \leq u_N \leq L$
- la suite est croissante, donc
  $\forall n \geq N, \qquad L - \varepsilon \leq u_N \leq u_n \leq L + \varepsilon$

$$|u_n - L| \leq \varepsilon$$

donc la suite (u_n) a pour limite L

Exemple

(u_n) donnée par $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$

- montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,1]$
  - propriété vraie pour $n = 0$
  - si $0 \leq u_n \leq 1$, alors $\frac{0^2+1}{2} \leq \frac{u_n^2+1}{2} \leq \frac{1^2+1}{2}$, c-à-d $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

  la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$
  $\hookrightarrow$ (u_n) est majorée
- (u_n) est croissante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
  $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2+1}{2} - u_n = \frac{(u_n-1)^2}{2} \geq 0$$
- (u_n) est croissante et majorée, donc converge vers une limite L
- $u_{n+1} \longrightarrow L$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2} \longrightarrow \dfrac{L^2+1}{2}$, donc $L = \dfrac{L^2+1}{2}$
- $L = \dfrac{L^2+1}{2} \Rightarrow 2L = L^2+1 \Rightarrow (L-1)^2 = 0 \Rightarrow L = 1$

conclusion : (u_n) converge vers 1

Exemple

suite de t. g. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

- (u_n) est croissante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
  $$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$$
- montrons que pour tout $n \geq 1$, $n! \geq 2^{n-1}$:
  $1! = 1 = 2^{1-1}$ et, pour $n \geq 2$, $n! = 2 \times 3 \times \cdots \times n \geq 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^{n-1}$
- donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
  $$u_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{2^\ell} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} \leq 3$$
  ainsi (u_n) est majorée

conclusion : (u_n) converge

(*vous verrez plus tard que* $\lim u_n = e$)

Exemple

suite de t. g. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

- $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$

  donc (u_n) est croissante
- Montrons par récurrence que : $\forall n \geq 1, \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$
  1. propriété vraie pour $n = 1$: $u_1 = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$
  2. supposons $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ (hypothèse de récurrence)
     - $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$
     - $\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
     - $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$ donc (u_n) est majorée

conclusion : (u_n) est convergente

(*vous verrez plus tard que* $\lim u_n = \frac{\pi^2}{6}$)

Exercice : Soit (v_n) définie par $v_0 = 1/2$ et $v_{n+1} = v_n - v_n^2$.

1. Quelle est la monotonie de (v_n) ?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq 1$.
3. Montrer que (v_n) converge et donner sa limite.

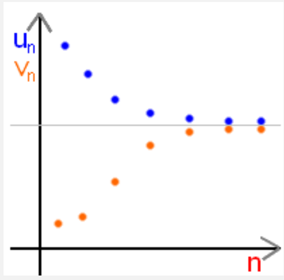
Exercice : Soit (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \frac{v_n^2}{1 + v_n^2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n \leq 1$.
2. Quelle est la monotonie de (v_n) ?
3. Montrer que (v_n) converge et donner sa limite.

Suites adjacentes

Définition. Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si

1. (v_n) est croissante et (u_n) est décroissante
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$



Théorème. Si deux suites sont adjacentes, alors elles sont convergentes et elles convergent vers la même limite

Suites adjacentes

Démonstration

- On a $(u_n - v_n)$ décroissante et tendant vers 0, donc positive, d'où le classement
$$v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \cdots \leq v_n \leq \ \ldots\ \leq u_n \leq \cdots \leq u_2 \leq u_1 \leq u_0$$
- (v_n) est majorée par u_0 : parce qu'elle est croissante, elle converge vers L
- (u_n) est minorée par v_0 : parce qu'elle est décroissante, elle converge vers L'

Or $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$ donc $L = L'$

Exercice : Dans chaque cas suivant, dire si les suites (u_n) et (v_n) dont on précise les t. g. sont adjacentes. Dans l'affirmative, donner leur limite commune.

1. $u_n = -\dfrac{1}{n+1}, \qquad v_n = \dfrac{1}{n+3}$
2. $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}, \qquad v_n = 1 + \sin\left(\dfrac{\pi}{2n+2}\right)$
3. $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}, \qquad v_n = \dfrac{n}{n+1}$
4. $u_n = 1 - \dfrac{2}{n+1}, \qquad v_n = \dfrac{2n}{n+3}$

Suites extraites

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On peut construire plusieurs suites à partir de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- la suite des termes de rang pair : $(v_n) = (u_{2n})$
- la suite des termes de rang impair : $(w_n) = (u_{2n+1})$
- la suite des termes de rang multiple de 3 : $(a_n) = (u_{3n})$
- ...

La construction repose sur deux moyens :

1. on choisit certains termes de la suite
2. on ne revient pas en arrière

On appelle suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$, où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante

Exemples : $\forall n \in \mathbb{N}$,

- $\varphi(n) = 2n$: suite des termes de rang pair ($v_n = u_{\varphi(n)} = u_{2n}$)
- $\varphi(n) = 2n+1$: suite des termes de rang impair ($w_n = u_{\varphi(n)} = u_{2n+1}$)
- $\varphi(n) = 3n$: suite des termes de rang multiple de 3 ($a_n = u_{\varphi(n)} = u_{3n}$)

Proposition : Soit$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers L.

Toute suite $(u_{\varphi(n)})$ extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite L.

Cette proposition est utile pour montrer qu'une suite ne converge pas.

Exemple : $\forall n \in N, \quad u_n = (-1)^n$

Si (u_n) converge vers L, toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers L.

- la suite extraite (v_n) vérifie $v_n = u_{2n} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\lim_{n\to\infty} v_n = 1$
- la suite extraite (w_n) vérifie $w_n = u_{2n+1} = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\lim_{n\to\infty} w_n = -1$

Conclusion : (u_n) diverge

Proposition : Soit (u_n) une suite ; on pose $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n = L \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = L$$

Démonstration.

1. $\lim_{n\to\infty} u_n = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = L$
2. $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} u_n = L$

1. les suites $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$ sont extraites de la suite (u_n) qui converge vers L, elles convergent donc aussi vers L
2. - (v_n) et (w_n) convergent vers L : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que
   $$\forall n \geq N_1,\ |v_n - L| \leq \varepsilon \text{ et } \forall n \geq N_2,\ |w_n - L| \leq \varepsilon$$
   donc (prendre $N = \max\{N_1, N_2\}$)
   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N,\ |v_n - L| \leq \varepsilon \text{ et } |w_n - L| \leq \varepsilon$$
   - soit $n > 2N$ (donc $n \geq 2N + 1$) :
     - si n est pair, $n = 2p$ et $p > N$ donc $|u_n - L| = |u_{2p} - L| = |v_p - L| \leq \varepsilon$
     - si n est impair, $n = 2p + 1$ et $p \geq N$ donc $|u_n - L| = |u_{2p+1} - L| = |w_p - L| \leq \varepsilon$

Exercices (difficiles) :

1. Soit (u_n) une suite et (u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n}) trois suites extraites de (u_n). Montrer que si ces trois suites sont convergentes, alors (u_n) est convergente

2. Soit (u_n) une suite telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$, la suite extraite (u_{kn}) est convergente. Peut-on en conclure que (u_n) est convergente ?
   (indice : penser à la suite (u_n) qui vaut 1 lorsque n est premier et 0 sinon)

Suites récurrentes

Une suite récurrente est définie par

1. son terme initial : u_0
2. la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

où $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée

Remarque importante : si $\lim(u_n) = L$ et f est continue, alors nécessairement $L = f(L)$ (L est un point fixe de f)

Exercice : Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner la seule limite possible de (u_n)

Exemples

Une suite arithmétique, de terme initial a et de raison r, est définie par :

1. $u_0 = a$
2. $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ associée est alors $\mapsto f(x) = x + r$

Une suite géométrique, de terme initial a et de raison q, est définie par :

1. $u_0 = a$
2. $u_{n+1} = q\, u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ associée est alors $x \mapsto f(x) = q\, x$

Exercice : On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4}, \qquad u_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}.$$

1. Montrer que la suite $(s_n) = (u_n + v_n)$ est constante
2. Montrer que la suite $(d_n) = (u_n - v_n)$ est géométrique et donner sa formule en fonction de n
3. En déduire des formules explicites pour (u_n) et (v_n), donner leurs limites et dire si elles sont adjacentes

Propriétés des suites récurrentes

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est croissante si

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}, \quad x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$$

(autrement dit, f préserve le sens des inégalités)

Soit (u_n) une suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ (tout $n \in \mathbb{N}$), avec f croissante

1. si $u_1 \geq u_0$, alors la suite (u_n) est croissante
2. si $u_1 \leq u_0$, alors la suite (u_n) est décroissante
3. si $u_1 = u_0$, alors la suite (u_n) est constante

$$u_{n+1} = f(u_n), \text{ avec } f \text{ croissante et } u_1 \geq u_0$$

Montrons par récurrence la propriété (P_n) : $\quad u_n \leq u_{n+1}$

- (P_0) est vraie
- si (P_n) est vraie (hypothèse de récurrence)...
  la fonction f est croissante, donc :

  $$u_n \leq u_{n+1} \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2}$$

  donc (P_{n+1}) est vraie
- conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$

(u_n) est croissante

Exercice : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 4/10$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^3$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$
2. Montrer que (u_n) est décroissante
3. La suite (u_n) converge-t-elle ? Si oui, donner sa limite

Notations de Landau

Définition. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n), ce que l'on note $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$ (ou plus simplement $u_n = o(v_n)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté), si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

(c-à-d, pour tout $\varepsilon > 0$, $|u_n| \leq \varepsilon |v_n|$ à partir d'un certain rang)

Il est souvent plus commode d'utiliser la caractérisation suivante :

Proposition. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que v_n ne s'annule pas. Alors

$$u_n = o(v_n) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Exemples

- $n = o(n^2)$ car $\dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- $\ln(n) = o(n)$ car $\dfrac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- $\dfrac{1}{n} = o(1)$ et, plus généralement, $u_n = o(1) \Leftrightarrow u_n \to 0$
- $u_n = o(0) \Leftrightarrow (u_n)$ est nulle à partir d'un certain rang (rarement utile)

Manipulation algébrique des $o()$

Dans la notation $u_n = o(v_n)$, le terme de droite représente n'importe quelle suite négligeable devant la suite (v_n)

→ règles spéciales pour manipuler algébriquement les $o()$:

- $o(u_n) + o(u_n) = o(u_n)$
- $\forall \lambda \neq 0, \quad \lambda o(u_n) = o(u_n) = o(\lambda u_n)$
- $o(u_n) - o(u_n) = o(u_n)$
  → en pratique on ne met donc jamais un coefficient ou un signe − devant un $o()$
- $o(o(u_n)) = o(u_n)$
- si $u_n = o(v_n)$, alors $o(u_n) + o(v_n) = o(v_n)$
- $x_n.o(v_n) = o(x_n.v_n)$
- $o(u_n).o(v_n) = o(u_n.v_n)$
- en cas de doute on revient à la définition ou à la caractérisation $u_n/v_n \to 0$

Preuve de $o(u_n) + o(u_n) = o(u_n)$

Soit (x_n) et (y_n) deux suites telles que $x_n = o(u_n)$ et $y_n = o(u_n)$. Montrons que $x_n + y_n = o(u_n)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq N_1, \quad |x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}|u_n|$$

$$\forall n \geq N_2, \quad |y_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}|u_n|$$

donc, en posant $N = \max\{N_1, N_2\}$, on a

$$\forall n \geq N, \quad |x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq \varepsilon |u_n|$$

ce qui montre bien que $x_n + y_n = o(u_n)$

Preuve de $x_n.o(v_n) = o(x_n.v_n)$

Soit (u_n) une suite telle que $u_n = o(v_n)$.
Montrons que $x_n.u_n = o(x_n.v_n)$.

On a
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$
donc
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad |x_n.u_n| \leq \varepsilon |x_n.v_n|$$
c-à-d exactement $x_n.u_n = o(x_n.v_n)$

Comparaisons classiques

Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\mu > \lambda > 1$, alors
$$(\ln n)^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty, \quad n^\beta \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty, \quad \lambda^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty,$$
$$n! \to +\infty, \quad n^n \to +\infty,$$
et
$$(\ln n)^\alpha = o(n^\beta), \quad n^\beta = o(\lambda^n), \quad \lambda^n = o(\mu^n),$$
$$\mu^n = o(n!), \quad n! = o(n^n)$$

Exercice : Donner les limites des suites de t. g. ci-dessous :

$$u_n = 2^n - n^{100}; \quad v_n = \frac{1}{\ln n - n^{-n}}; \quad w_n = e^{n^3 - 3^n}; \quad x_n = n^n - 100n!$$

Suites équivalentes

Définition. On dit que deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont équivalentes, ce que l'on note $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, si $u_n = v_n + o(v_n)$

Remarque : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \iff v_n \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$

Proposition. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que v_n ne s'annule pas. Alors

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \qquad \iff \qquad \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Preuve :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \iff u_n = v_n + o(v_n) \iff \frac{u_n}{v_n} = 1 + o(1) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Exemples

- $\sqrt{n} = o(n)$ donc $n + \sqrt{n} = n + o(n)$ donc $n + \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\sim} n$
- $\sqrt{n^2+1} = n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$ et $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, donc $\sqrt{n^2+1} \underset{n\to\infty}{\sim} n$
- $\forall L \neq 0, \quad u_n \underset{n\to\infty}{\sim} L \iff u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$
- $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} 0 \iff (u_n)$ est nulle à partir d'un certain rang (rarement utile)

Règles de calcul avec les équivalents

- si $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$ et $b_n \underset{n\to\infty}{\sim} c_n$, alors $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} c_n$
- si $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} x_n$ et $b_n \underset{n\to\infty}{\sim} y_n$, alors $a_n.b_n \underset{n\to\infty}{\sim} x_n.y_n$
- si $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} x_n$ et $b_n \underset{n\to\infty}{\sim} y_n$ et b_n et y_n ne s'annulent pas, alors
$$\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{x_n}{y_n}$$
- si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ et $\alpha > 0$, alors $u_n^\alpha = v_n^\alpha$
- si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to\infty}{\sim} w_n$, alors $u_n = o(w_n)$
- en cas de doute on revient à la définition ou à la caractérisation $u_n/v_n \to 1$

Pièges à éviter

- on n'additionne jamais les équivalents !

  $a_n \sim x_n$ et $b_n \sim y_n$ n'implique pas $a_n + b_n \sim x_n + y_n$

  contre-exemple à retenir : $n+1 \underset{n\to\infty}{\sim} n$ et $-n \underset{n\to\infty}{\sim} -n$
  (en additionnant, on obtiendrait l'absurdité $1 \sim 0$)

- si $u_n \sim v_n$, on n'a pas $f(u_n) \sim f(g_n)$ pour toute fonction f !

  contre-exemple : $u_n = n$, $v_n = n + \sqrt{n}$, $f(x) = e^x$

  en effet $\dfrac{f(u_n)}{f(v_n)} = \dfrac{e^{n+\sqrt{n}}}{e^n} = e^{\sqrt{n}}$ ne tend pas vers 1

Exercice : Soient deux suites (u_n) et (v_n) strictement positives telles que $v_n \to +\infty$ et $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$. Montrer que $\ln u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln v_n$

$$
\begin{array}{llll}
u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n & \Rightarrow & \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 & \text{(caractérisation)} \\
 & \Rightarrow & \ln\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 & (\ln \text{ est continue}) \\
 & \Rightarrow & \ln u_n - \ln v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 & \\
 & \Rightarrow & \ln u_n - \ln v_n = o(1) & \\
 & \Rightarrow & \ln u_n - \ln v_n = o(\ln v_n) & (\text{car } 1 = o(\ln v_n)) \\
 & \Rightarrow & \ln u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln v_n & \text{(définition)}
\end{array}
$$

Exercice : Soient deux suites (u_n) et (v_n) strictement positives telles que $v_n \to 0$ et $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$. Montrer que $\ln u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln v_n$.

Équivalents de suites polynomiales

Proposition. Une expression polynomiale est équivalente à son terme dominant (terme de plus haut degré). Si $a_d \neq 0$, alors

$$a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \ldots + a_1 n + a_0 \underset{n\to\infty}{\sim} a_d n^d$$

Preuve : pour tout $k < d$, $n^k = o(n^d)$ donc $a_k n^k = o(n^d)$ et donc

$$a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \ldots + a_1 n + a_0 = a_d n^d + o(n^d) \underset{n\to\infty}{\sim} a_d n^d$$

Corollaire. Un quotient d'expressions polynomiales (fraction rationelle) est équivalente au quotient des termes dominants du numérateur et du dénominateur. Si $a_d \neq 0$ et $b'_d \neq 0$, alors

$$\frac{a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_{d'} n^{d'} + b_{d'-1} n^{d'-1} + \ldots + b_1 n + b_0} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{a_d n^d}{b_{d'} n^{d'}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{a_d}{b_{d'}} n^{d-d'}$$

Exercice : Pour chaque suite de t. g. ci-dessous, donner un équivalent (le plus simple possible) et en déduire sa limite éventuelle.

- $u_n = \dfrac{4n^2 + 3n + 5}{e^n + e^{-n}}$
- $v_n = \dfrac{5^n + n^2 2^n + n^n}{-2n^3 + n^2 - 4n + 1}$
- $w_n = \dfrac{4n^2 + 3e^n - 5^n}{-2n^3 + 5^n + e^{-n}}$

Exercice : En utilisant la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n},$$

calculer un équivalent de $\binom{2n}{n}$ (coefficient binomial)

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} && \text{(définition)}\\
&\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})^2} && \text{(formule de Stirling)}\\
&\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2^{2n}n^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{n^{2n}e^{-2n}2\pi n}\\
&\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}
\end{aligned}$$

Exercice : Trouver un équivalent de la suite de t. g.
$u_n = \sqrt{n^2+1} - n$

Pour "simplifier" l'expression $\sqrt{a} - b$, on multiplie et on divise par la quantité conjuguée $\sqrt{a} + b$:

$$\begin{aligned}
u_n &= \left(\sqrt{n^2+1} - n\right).\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n}\\
&= \frac{\left(\sqrt{n^2+1}\right)^2 - n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}\\
&= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\\
&\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \qquad \text{car } \sqrt{n^2+1} = n + o(n)
\end{aligned}$$

Exercice : Pour chaque suite de t. g. ci-dessous, donner un équivalent (le plus simple possible) et en déduire sa limite éventuelle.

- $u_n = \dfrac{\sqrt{1+n^2}\big((\sin n)\sqrt{n} - \ln(n^2)\big)}{\ln(1+e^{n^2})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$
- $v_n = \dfrac{n^{2n} - (2n)^n}{\sqrt{e^n} - e^{\sqrt{n}}}$
- $w_n = \ln(n+\sqrt{n})e^{-\sqrt{n}} - 2^{-n}\cos(n^{-2})$