Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 1ère année, 2025-2026, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Ensemble des sujets de l'interro no3

Sujet A

Exercice 1

Factoriser dans $\mathbb{C}$ chacun des polynômes suivants :

1. $P_1 = X^2 + 2iX + 3$,
2. $P_2 = X^3 - X^2 - 4X + 4$.

Exercice 2

On considère le polynôme $P = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$.

1. Calculer P' et P''.
2. En déduire la multiplicité de 1 en tant que racine du polynôme P.
3. Effectuer la division euclidienne de P par $X^2 - 2X + 1$.

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -\frac{3}{4}u_n \end{cases}$$

Préciser si u est arithmétique ou géométrique, préciser sa raison, puis donner l'expression du terme général u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Sujet B

Exercice 1

1. Soit $P = X^4 + 4X^2 + 5X^2 + 4X + 4$ et $Q = X^2 + 1$ deux polynômes.
   a) Effectuer la division euclidienne de P par Q.
   b) En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Soient u une suite minorée et v une suite majorée. Montrer que la suite $u - v$ est minorée.

Sujet C

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + z\sqrt{3} + i = 0$.

Exercice 2

On considère le polynôme $P = X^3 + 2X^2 + 4X + 3$.

1. Trouver une racine évidente de P, et expliciter la factorisation qui en résulte.
2. En déduire l'ensemble des racines dans $\mathbb{C}$ de P.

Exercice 3
Soit $A = X^5 - 3X^3 - X^2 + X + 4$ et $B = X^3 - 2X^2 + 1$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Effectuer la division euclidienne de A par B.

Sujet D

Exercice 1
Soit le polynôme
$$P(X) = X^3 - 5X^2 + 8X - 4.$$
1. Vérifier que $P(1) = 0$.

2. Factoriser complètement P dans $\mathbb{C}[X]$ et indiquer la multiplicité de chaque racine.

3. Calculer la dérivée P' et déterminer ses racines ainsi que l'ordre de multiplicité de chacune.

Exercice 2
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme satisfaisant
$$P' = 2P - 3X.$$
On rappelle que pour deux polynômes A et B, si $\deg(A) \neq \deg(B)$, alors $\deg(A+B) = \max(\deg A, \deg B)$.
1. Montrer que P n'est pas constant.

2. Montrer que le degré de P ne peut pas être différent de 1 et en déduire le degré.

3. Écrire P sous la forme $P = aX + b$ et déterminer les coefficients a et b.

4. Étudier si P et sa dérivée P' peuvent avoir une racine commune.

Exercice 3 (Bonus - ♣)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant vérifiant
$$XP' = P + X^n$$
pour un entier $n \geqslant 1$.
1. Étudier le cas $n = 1$.

2. Montrer que $\deg(P) = n$ si $n \geqslant 2$.

3. Déterminer la forme générale de $P(X)$ en fonction de n.

Sujet E

Exercice 1 (Factorisation)
Factoriser dans $\mathbb{C}$ chacun des polynômes suivants :
1. $P_1 = X^3 + 3X$,

2. $P_2 = X^3 + (i-1)X - i$.

Exercice 2 (Division euclidienne)
Soient $A, B \in \mathbb{C}[X]$. Effectuer la division euclidienne de A par B dans chacun des cas suivants :
1. $A = X^3 + 2X + 3$ et $B = X^2 + 1$,

2. $A = X^7$ et $B = X^3 + 2$.

Exercice 3 (Racines multiples)
On considère le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par

$$P = 8X^3 - 12(\alpha+1)X^2 + 24\alpha X - 9\alpha,$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$. On suppose que P admet au moins une racine multiple. Déterminer toutes les valeurs possibles de α.

Exercice 4 (Bonus - Suite récurrente)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n, \qquad u_0 = 1, u_1 = 2.$$

1. Calculer $u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$.
2. Déterminer et justifier par récurrence l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Sujet F

Exercice 1
Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, la somme suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

Exercice 2
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Exercice 3
Factoriser complètement (dans $\mathbb{C}$) le polynôme suivant : $P = 5X^5 - 5X^4 + 15X^3 - 15X^2$.

Exercice 4
Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$. Effectuer la division euclidienne de $A = X^5 - 3X^2 + X$ par $B = X^3 + X + 1$.