

Licence 1^{ère} année, 2025-2026, MATHÉMATIQUES ET CALCUL 1 (MC1)

Ensemble des sujets de l'interro n°2

SUJET A

Exercice 1

1. Soit $z_1 = \frac{2i+2\sqrt{3}}{-4i}$. Trouver les $v = x + iy$ avec x et y réels tel que $v^2 = z_1$.
2. Soit $w = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Ecrire w sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique. En déduire que w est une racine carrée de z_1 , et l'expression de z_1 sous forme exponentielle.
3. Montrer que $e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z définis par : $E = \{M(z), |z - 1 - i\sqrt{3}(1 + z)| = 2\}$, ainsi qu'un point évident de E . (Il n'est pas demandé de représenter E graphiquement). Indice : on pourra faire apparaître l'expression de w .

Correction.

1. Commençons par mettre z_1 sous forme algébrique. En multipliant le numérateur et le dénominateur par i , on obtient

$$z_1 = \frac{(2i + 2\sqrt{3})i}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pour chercher les racines carrées de z_1 , on écrit $v = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. L'égalité $v^2 = z_1$ impose l'égalité des parties réelles et imaginaires. Elle donne aussi $|v|^2 = |z_1|$, ce qui permet de déterminer $x^2 + y^2$.

Analyse. Supposons que $v = x + iy$ vérifie $v^2 = z_1$. Comme $|z_1| = 1$, on a

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{1}{2}, \\ x^2 + y^2 = 1, \\ 2xy = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Les deux premières égalités donnent $x^2 = \frac{1}{4}$ et $y^2 = \frac{3}{4}$. La dernière impose $xy > 0$: x et y ont donc le même signe. Les seuls candidats sont

$$v_+ = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad v_- = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Synthèse. On vérifie que

$$v_+^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = z_1, \quad v_-^2 = (-v_+)^2 = z_1.$$

Ainsi, les racines carrées de z_1 sont exactement v_+ et v_- .

2. Par la formule d'Euler,

$$w = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On reconnaît v_+ de la première question, donc $w^2 = z_1$. Par conséquent,

$$z_1 = w^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

3. Puisque $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$ et $e^{i\pi} = -1$, on a

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = -e^{-i\frac{\pi}{3}} = -\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

4. On utilise $1 + i\sqrt{3} = 2w$ et $1 - i\sqrt{3} = 2\bar{w}$. Puisque $|w| = 1$, on a $w\bar{w} = 1$ et donc $w = \bar{w}w^2$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} z - 1 - i\sqrt{3}(1+z) &= (1 - i\sqrt{3})z - (1 + i\sqrt{3}), \\ &= 2\bar{w}z - 2w = 2\bar{w}(z - w^2). \end{aligned}$$

Comme $|\bar{w}| = 1$ et $w^2 = z_1$, on obtient

$$|z - 1 - i\sqrt{3}(1+z)| = 2 \Leftrightarrow 2|z - z_1| = 2 \Leftrightarrow |z - z_1| = 1.$$

Si z et a sont les affixes de deux points M et A , alors $|z - a|$ est la distance AM .

L'ensemble E est donc le cercle de centre le point d'affixe $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et de rayon 1. Comme $|z_1| = 1$, l'origine O appartient à ce cercle : c'est un point évident de E .

SUJET B

Exercice 1

Soit $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1\}$. Construire une surjection définie sur A dont l'ensemble d'arrivée est B .

Correction. Une application $f : A \rightarrow B$ est surjective si

$$\forall b \in B, \exists a \in A, \quad f(a) = b.$$

Il faut donc que chacune des deux valeurs 0 et 1 soit atteinte.

Définissons $f : A \rightarrow B$ par $f(1) = f(2) = 0$ et $f(3) = 1$. Les trois images appartiennent à B , donc f est bien définie. De plus, 0 possède l'antécédent 1, et 1 possède l'antécédent 3. Tous les éléments de B ont donc au moins un antécédent dans A , ce qui prouve que f est surjective.

Exercice 2

Calculer les racines carrées de $z = 16i - 12$.

Correction. *Analyse.* Soit $v = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, tel que $v^2 = -12 + 16i$. Comme $|-12 + 16i| = \sqrt{144 + 256} = 20$, l'égalité des modules donne $x^2 + y^2 = 20$. En identifiant aussi les parties réelle et imaginaire, on obtient

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -12, \\ x^2 + y^2 = 20, \\ 2xy = 16. \end{cases}$$

D'où $x^2 = 4$, $y^2 = 16$ et $xy = 8$. Puisque le produit est positif, x et y ont le même signe. Les seuls candidats sont donc $2 + 4i$ et $-2 - 4i$.

Synthèse. On a $(2 + 4i)^2 = 4 - 16 + 16i = -12 + 16i$, et l'opposé de $2 + 4i$ a le même carré. Les deux candidats conviennent. Les racines carrées cherchées sont donc exactement $2 + 4i$ et $-2 - 4i$.

Les égalités sur x^2 et y^2 ne suffisent pas : les nombres $2 - 4i$ et $-2 + 4i$ ont aussi ces carrés de coordonnées, mais leur carré vaut $-12 - 16i$. La condition $2xy = 16$ est donc essentielle.

Exercice 3

Mettre le nombre complexe suivant sous forme trigonométrique $z = (-4 - i4\sqrt{3})^3$.

Correction. Le nombre $-4 - 4i\sqrt{3}$ a pour module $\sqrt{16 + 48} = 8$. En divisant par ce module, on reconnaît

$$-4 - 4i\sqrt{3} = 8 \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 8 \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right).$$

La formule de Moivre donne, pour tout réel φ et tout entier naturel n ,

$$(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).$$

Elle permet de calculer une puissance en multipliant l'angle et en élevant le module à cette puissance.

Ainsi,

$$z = 8^3 (\cos(4\pi) + i\sin(4\pi)) = 512 (\cos(0) + i\sin(0)) = 512.$$

L'écriture $512(\cos(0) + i\sin(0))$ est une forme trigonométrique de z .

Exercice 4

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer le module et l'argument principal de $z = e^{-i\theta} + e^{3i\theta}$.

Correction. Pour lire un module et un argument dans $z = re^{i\varphi}$, il faut que $r > 0$. Un coefficient réel négatif se réécrit en utilisant $-1 = e^{i\pi}$. Le nombre 0 n'a pas d'argument. La convention du cours est $\arg(z) \in [0, 2\pi[$ pour $z \neq 0$.

On factorise par l'exponentielle correspondant à la moyenne des deux angles :

$$z = e^{i\theta} (e^{-2i\theta} + e^{2i\theta}) = 2 \cos(2\theta) e^{i\theta}.$$

Comme $|e^{i\theta}| = 1$, on a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$|z| = 2 |\cos(2\theta)|.$$

Si $\cos(2\theta) = 0$, c'est-à-dire si $\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ pour un entier k , alors $z = 0$ et l'argument principal n'est pas défini.

Supposons désormais $\cos(2\theta) \neq 0$. On distingue deux cas :

- si $\cos(2\theta) > 0$, alors $z = 2 |\cos(2\theta)| e^{i\theta}$, donc θ est un argument de z ;
- si $\cos(2\theta) < 0$, alors $z = 2 |\cos(2\theta)| e^{i(\theta+\pi)}$, donc $\theta + \pi$ est un argument de z .

Notons φ l'angle ainsi obtenu. L'argument principal est l'unique représentant de φ modulo 2π situé dans $[0, 2\pi[$. Explicitement, en notant E la fonction partie entière,

$$\arg(z) = \varphi - 2\pi E\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right), \quad \varphi = \begin{cases} \theta & \text{si } \cos(2\theta) > 0, \\ \theta + \pi & \text{si } \cos(2\theta) < 0. \end{cases}$$

La formule avec la partie entière traduit simplement la réduction de l'angle modulo 2π : elle n'est pas une nouvelle formule à mémoriser. Si $k = E\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)$, alors $k \leq \frac{\varphi}{2\pi} < k+1$, donc $0 \leq \varphi - 2k\pi < 2\pi$.

SUJET C

Exercice 1

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Rappeler les définitions d'injectivité, surjectivité et bijectivité, ainsi que leurs négations.
2. Soit $A = \{\pi, \sqrt{3}, 10\}$ et $B = \{0, 1\}$.
 - a) Est-il possible de construire une surjection de A vers B ? Si oui, construire une telle surjection. Si non, donner une courte justification.
 - b) Est-il possible de construire une injection de A vers B ? Si oui, construire une telle injection. Si non, donner une courte justification.

Correction.

1. Les définitions portent sur les antécédents des éléments de l'ensemble d'arrivée.

— *Injectivité.* Tout réel possède au plus un antécédent par f :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall x' \in \mathbb{R}, \quad (f(x) = f(x') \implies x = x').$$

Sa négation est

$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x') \text{ et } x \neq x'.$$

Elle exprime que deux éléments distincts de l'ensemble de départ ont la même image.

— *Surjectivité.* Tout réel possède au moins un antécédent par f :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = y.$$

Sa négation est

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq y.$$

Elle exprime qu'au moins un élément de l'ensemble d'arrivée n'est jamais atteint.

— *Bijektivité.* Tout réel possède exactement un antécédent par f :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists! x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = y.$$

Par définition, f est bijective si et seulement si elle est injective et surjective. Sa négation est donc « f n'est pas injective ou f n'est pas surjective », soit

$$(\exists x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, f(x) = f(x') \text{ et } x \neq x')$$

ou

$$(\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y).$$

Ces négations se reconstruisent en échangeant $\forall$ et $\exists$ et en niant la propriété. Pour deux assertions P, Q , on a $(P \implies Q) \Leftrightarrow (\neg P \text{ ou } Q)$: nier l'implication donne donc P et non Q , ce qui permet de nier la définition de l'injectivité. Pour la bijectivité, on nie une conjonction, d'où le connecteur « ou ».

2. a) Oui. Définissons $g : A \rightarrow B$ par $g(\pi) = g(\sqrt{3}) = 0$ et $g(10) = 1$. Toutes les images sont dans B . De plus, 0 est atteint en π et 1 est atteint en 10 : chaque élément de B possède au moins un antécédent. L'application g est donc surjective.
- b) Non. Si une application de A dans B était injective, les trois éléments distincts $\pi, \sqrt{3}, 10$ auraient trois images distinctes dans B . C'est impossible, puisque B ne contient que deux éléments.

Exercice 2

1. Donner la partie réelle, la partie imaginaire, le conjugué et le module des complexes suivants.

a) $z_1 = -6i - 2$.

b) $z_2 = 9$.

c) $z_3 = i(2 + 3i)$.

d) $z_4 = 3i$.

2. Donner le module et un argument des complexes suivants.

a) $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \times 3e^{i\frac{\pi}{2}}$.

b) $z_2 = i^{34}$.

c) $z_3 = e^{e^{i\beta}}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$.

Correction.

1. Pour $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{Re}(z) = x$, $\operatorname{Im}(z) = y$, $\bar{z} = x - iy$ et $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. La partie imaginaire est un réel : c'est y , et non iy .

On écrit d'abord $z_3 = i(2 + 3i) = -3 + 2i$. Les résultats sont alors

z	$\operatorname{Re}(z)$	$\operatorname{Im}(z)$	$\bar{z}$	$ z $
$z_1 = -2 - 6i$	-2	-6	$-2 + 6i$	$2\sqrt{10}$
$z_2 = 9$	9	0	9	9
$z_3 = -3 + 2i$	-3	2	$-3 - 2i$	$\sqrt{13}$
$z_4 = 3i$	0	3	$-3i$	3

2. Une écriture $z = re^{i\varphi}$, avec $r > 0$, donne $|z| = r$ et un argument φ de z . On demande ici un argument, pas nécessairement l'argument principal.

- a) En multipliant les modules et en additionnant les angles,

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \times 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 6e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Le module vaut 6 et $\frac{3\pi}{4}$ est un argument.

- b) Comme $34 = 4 \times 8 + 2$, on a $z_2 = i^{34} = i^2 = -1 = e^{i\pi}$. Le module vaut 1 et π est un argument.

- c) La formule d'Euler et la propriété $e^{u+v} = e^u e^v$ donnent

$$z_3 = e^{\cos(\beta) + i \sin(\beta)} = e^{\cos(\beta)} e^{i \sin(\beta)}.$$

Puisque $e^{\cos(\beta)} > 0$, le module vaut $e^{\cos(\beta)}$ et $\sin(\beta)$ est un argument. Ce dernier n'est pas toujours l'argument principal, car il peut être négatif.

Exercice 3

1. Mettre sous forme algébrique $z_1 = \frac{2-i}{1+i}$.
2. Mettre sous forme exponentielle $z_2 = 1 - i$.

Correction.

1. Le dénominateur $1 + i$ est non nul. En multipliant le numérateur et le dénominateur par son conjugué,

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}, \\ &= \frac{2-3i+i^2}{2} = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

2. Le module de z_2 vaut $\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Ainsi,

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

C'est une forme exponentielle de z_2 . On peut aussi utiliser l'angle $\frac{7\pi}{4}$, qui représente le même argument modulo 2π .

SUJET D

Exercice 1

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants.

1. $\frac{5+5i}{1-2i} + 1$.
2. $(1-i)^3$.

Correction.

1. Le dénominateur $1 - 2i$ est non nul. On calcule

$$\frac{5+5i}{1-2i} + 1 = \frac{(5+5i)(1+2i)}{5} + 1 = \frac{-5+15i}{5} + 1 = 3i.$$

Une forme trigonométrique est donc $3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$.

2. Puisque $1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$, la formule de Moivre donne

$$(1-i)^3 = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right).$$

Les angles $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$ diffèrent de 2π : ils donnent la même forme trigonométrique.

Exercice 2

Simplifier l'ensemble suivant, puis en donner une interprétation géométrique et le représenter dans le plan complexe.

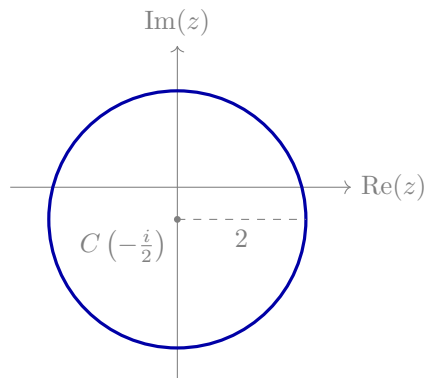
$$E = \{z \in \mathbb{C} : |2z + i| = 4\}.$$

Correction. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$|2z + i| = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \left| z + \frac{i}{2} \right| = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \left| z - \left(-\frac{i}{2} \right) \right| = 2.$$

Si a est l'affixe d'un point C et z celle d'un point M , alors $|z - a| = CM$. Pour $r > 0$, l'équation $|z - a| = r$ décrit donc le cercle de centre C et de rayon r .

Ainsi, E est le cercle de centre C d'affixe $-\frac{i}{2}$ et de rayon 2. Sur la Figure 1, seul le cercle bleu représente E ; le centre et le rayon gris servent à sa construction.

FIGURE 1. Cercle d'équation $|2z + i| = 4$.**Exercice 3**

1. Déterminer les racines carrées de $2 - 2\sqrt{3}i$.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation suivante

$$z^2 + \sqrt{2}z + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0.$$

Correction.

1. On a $2 - 2\sqrt{3}i = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Le nombre $u = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ vérifie donc $u^2 = 2 - 2\sqrt{3}i$. Sous forme algébrique,

$$u = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} - i.$$

Une fois une racine carrée u d'un nombre non nul a trouvée, les racines sont exactement u et $-u$: pour tout $v \in \mathbb{C}$, on a $v^2 = a \Leftrightarrow (v - u)(v + u) = 0$.

Les racines carrées cherchées sont donc $\sqrt{3} - i$ et $-\sqrt{3} + i$.

2. Pour faire intervenir le nombre de la première question, on complète le carré. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^2 + \sqrt{2}z + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2z + \sqrt{2})^2 = 2 - 2\sqrt{3}i.$$

D'après la première question, cette dernière égalité équivaut à $2z + \sqrt{2} = \sqrt{3} - i$ ou $2z + \sqrt{2} = -\sqrt{3} + i$. L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3} - i}{2}, \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{3} + i}{2} \right\}.$$

On retrouve le discriminant $\Delta = (\sqrt{2})^2 - 4\frac{\sqrt{3}}{2}i = 2 - 2\sqrt{3}i$. La forme canonique explique pourquoi les racines carrées calculées à la première question interviennent.

Sujet E

Exercice 1

Soit $z = 1 - i\sqrt{3}$. Calculez z^{10} .

Correction. Le module de z vaut 2, et

$$z = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

On élève le module à la puissance 10 et on multiplie l'angle par 10 :

$$z^{10} = 2^{10} e^{-i\frac{10\pi}{3}} = 1024 e^{i\frac{2\pi}{3}},$$

car $-\frac{10\pi}{3} + 4\pi = \frac{2\pi}{3}$. Ainsi,

$$z^{10} = 1024 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -512 + 512i\sqrt{3}.$$

Exercice 2

Résolvez dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 - (4 - i)z + 5 + i = 0$.
2. $z^4 + z^3 + z^2 + z = 0$.

Correction.

1. Pour une équation $az^2 + bz + c = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, compléter le carré donne l'équation équivalente $(2az + b)^2 = b^2 - 4ac$. Ici, le discriminant vaut

$$\Delta = (4 - i)^2 - 4(5 + i) = -5 - 12i.$$

Cherchons ses racines carrées sous la forme $x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Si $(x + iy)^2 = \Delta$, alors $x^2 - y^2 = -5$ et $2xy = -12$. De plus, $|\Delta| = 13$, donc $x^2 + y^2 = 13$. On en déduit $x^2 = 4$, $y^2 = 9$ et $xy = -6$, d'où les deux candidats opposés $2 - 3i$ et $-2 + 3i$. On vérifie que $(2 - 3i)^2 = -5 - 12i$, donc ce sont bien les racines carrées de Δ .

L'équation initiale équivaut à $(2z - (4 - i))^2 = \Delta$, puis à

$$2z - (4 - i) = 2 - 3i \quad \text{ou} \quad 2z - (4 - i) = -2 + 3i.$$

On obtient donc les solutions

$$z = \frac{4 - i + 2 - 3i}{2} = 3 - 2i \quad \text{ou} \quad z = \frac{4 - i - 2 + 3i}{2} = 1 + i.$$

2. On factorise sans diviser par z :

$$\begin{aligned} z^4 + z^3 + z^2 + z &= z(z^2(z + 1) + (z + 1)), \\ &= z(z + 1)(z^2 + 1) = z(z + 1)(z - i)(z + i). \end{aligned}$$

Un produit de nombres complexes est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul. L'ensemble des solutions est donc $\{0, -1, i, -i\}$.

Diviser d'emblée l'équation par z ferait perdre la solution $z = 0$ si l'on ne traitait pas ce cas séparément.

Exercice 3

Soient $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i$.

1. Exprimez z_1 et z_2 sous forme exponentielle complexe

$$z = r e^{i\theta} \quad \text{avec } r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in]-\pi, \pi].$$

2. Soit

$$Z = \frac{z_1}{z_2}.$$

Exprimez d'abord Z sous forme algébrique. Ensuite, en utilisant les résultats de la question 1, exprimez Z sous forme exponentielle.

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Correction.

1. On a $|z_1| = 2$ et $|z_2| = \sqrt{2}$, donc

$$z_1 = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z_2 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Les modules sont strictement positifs et les angles $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$ appartiennent à $] -\pi, \pi]$, comme demandé dans cette question.

2. Puisque $z_2 \neq 0$, le quotient est bien défini. Sous forme algébrique,

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{2}, \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{\sqrt{3} - 1}{2}. \end{aligned}$$

D'autre part, les formes exponentielles de la première question donnent

$$Z = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

3. Par la formule d'Euler,

$$Z = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire avec la forme algébrique obtenue à la deuxième question, on obtient

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 4

Soit

$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z + 1 - 2i) = 0 \pmod{2\pi}\}.$$

1. Que peut-on dire de la partie imaginaire de z pour $z \in E$?
2. Donnez une interprétation géométrique de cet ensemble dans le plan complexe.

Correction. Un nombre complexe non nul a un argument égal à 0 modulo 2π si et seulement s'il est réel strictement positif. Le mot « strictement » est essentiel, car 0 n'a pas d'argument.

1. Soit $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. On a $z + 1 - 2i = (x + 1) + i(y - 2)$. Si $z \in E$, ce nombre est réel strictement positif, donc $y - 2 = 0$ et $x + 1 > 0$. En particulier, $\text{Im}(z) = 2$.
2. Réciproquement, si $y = 2$ et $x > -1$, alors $z + 1 - 2i = x + 1 > 0$, donc $z \in E$. Ainsi,

$$E = \{x + 2i \mid x > -1\}.$$

C'est la demi-droite horizontale d'origine le point d'affixe $-1 + 2i$, exclu, dirigée vers les abscisses croissantes. La Figure 2 indique cette extrémité exclue par un point creux.

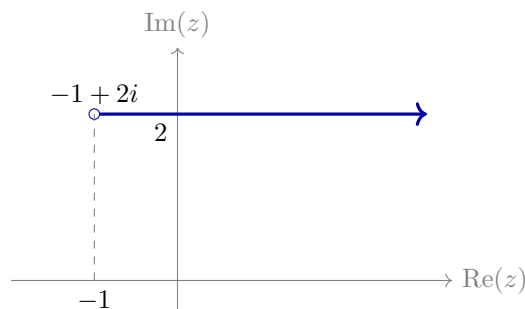


FIGURE 2. Demi-droite définie par $\arg(z + 1 - 2i) = 0 \pmod{2\pi}$.

Sujet F

Exercice 1 (Géométrie complexe)

Déterminer les ensembles A et B des points d'affixe z définis par :

$$A = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}((1+i)z) = 0\},$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} / |z + iz - 1| = \sqrt{2}\}.$$

Donner pour chacun des ensembles une interprétation géométrique.

Correction. Pour l'ensemble A , écrivons $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$(1+i)z = x - y + i(x+y).$$

Par conséquent,

$$z \in A \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x.$$

L'ensemble A est donc la droite d'équation $y = -x$, passant par l'origine.

Pour l'ensemble B , on cherche à faire apparaître une expression $|z - a|$. Comme $1 + i \neq 0$ et $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$, on a

$$z + iz - 1 = (1+i) \left(z - \frac{1-i}{2} \right).$$

Puisque $|1+i| = \sqrt{2}$,

$$z \in B \Leftrightarrow \sqrt{2} \left| z - \frac{1-i}{2} \right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left| z - \frac{1-i}{2} \right| = 1.$$

L'ensemble B est donc le cercle de centre le point d'affixe $\frac{1-i}{2}$ et de rayon 1.

Exercice 2 (Calculs trigonométriques)

1. Calculer sous forme algébrique les racines carrées de

$$\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2. Démontrer l'identité

$$\sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta).$$

Vérifier votre résultat à partir de la première partie.

Correction.

1. *Analyse.* Supposons que $v = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, vérifie $v^2 = \omega$. Comme $|\omega| = 1$, on obtient

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ x^2 + y^2 = 1, \\ 2xy = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ainsi, $x^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, $y^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ et $xy = \frac{1}{4} > 0$. Les deux radicandes sont strictement positifs, car $\sqrt{3} < 2$. Les coordonnées ont le même signe : les seuls candidats sont u et $-u$, où

$$u = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Synthèse. La différence des carrés des coordonnées de u vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$, et le double de leur produit vaut

$$\frac{\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}{2} = \frac{1}{2}.$$

On a donc $u^2 = \omega$, et $(-u)^2 = \omega$. Les racines carrées de ω sont exactement u et $-u$.

Or $\omega = e^{i\frac{\pi}{6}}$, donc $e^{i\frac{\pi}{12}}$ est une racine carrée de ω . Comme $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$, son cosinus et son sinus sont strictement positifs : on doit donc avoir $e^{i\frac{\pi}{12}} = u$, et non $-u$. En identifiant les parties imaginaires,

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La formule de Moivre donne

$$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3.$$

En développant le membre de droite et en identifiant les parties imaginaires,

$$\begin{aligned}\sin(3\theta) &= 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta), \\ &= 3(1 - \sin^2(\theta))\sin(\theta) - \sin^3(\theta), \\ &= 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta).\end{aligned}$$

Pour vérifier la cohérence avec la première question, prenons $\theta = \frac{\pi}{12}$ et posons $s = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. Comme $4s^2 = 2 - \sqrt{3}$,

$$3s - 4s^3 = s(1 + \sqrt{3}) = \frac{(1 + \sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La dernière égalité vient de $(1 + \sqrt{3})^2(2 - \sqrt{3}) = 2$ et de la positivité des facteurs. On retrouve bien $\sin\left(3\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Cette vérification en $\theta = \frac{\pi}{12}$ contrôle le calcul, mais ne remplace pas la démonstration de l'identité pour tout réel θ .

Exercice 3 (Équations complexes)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

- $z^2 - i = 0$.
- $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i = 0$.

Correction.

- Le nombre $u = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ vérifie $u^2 = i$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^2 - i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z - u)(z + u) = 0.$$

Les solutions sont donc $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

- On reconnaît $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = (z - 1)^3$. L'équation équivaut donc à

$$(z - 1)^3 = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i.$$

Posons $v = z - 1$. Ce changement d'inconnue est réversible, puisque $z = 1 + v$. Le membre de droite a pour module 8 et pour argument $\frac{3\pi}{4}$: il s'écrit $8e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Comme ce nombre est non nul, une solution v est non nulle. Écrivons $v = re^{i\varphi}$, avec $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. En identifiant les modules et les arguments modulo 2π ,

$$v^3 = 8e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^3 = 8, \\ 3\varphi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{pour un } k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

soit $r = 2$ et $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$. Les valeurs de k qui diffèrent de 3 donnent le même nombre complexe. Les trois valeurs $k = 0, 1, 2$ donnent des nombres distincts et représentent donc toutes les solutions pour v .

En revenant à $z = 1 + v$, l'ensemble des solutions de l'équation initiale est

$$\left\{ 1 + 2e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \mid k \in \{0, 1, 2\} \right\}.$$

Les angles sont déterminés modulo 2π avant la division par 3. C'est pourquoi on obtient trois racines cubiques, espacées d'un angle $\frac{2\pi}{3}$, et non une seule.

Exercice 4 Bonus - Racines 7^{ème} de l'unité

Soit $z_* = e^{\frac{2\pi i}{7}}$.

1. Calculer

$$1 + z_* + z_*^2 + z_*^3 + z_*^4 + z_*^5 + z_*^6.$$

2. Posons $w = z_* + \bar{z}_*$. Montrer que $w = z_* + z_*^{-1}$ et que

$$w^3 + w^2 - 2w - 1 = 0.$$

3. Si l'équation $w^3 + w^2 - 2w - 1 = 0$ admet une unique solution réelle positive notée w_* , avec $0 < w_* < 2$, écrire la forme algébrique de z_* en fonction de w_* .

Correction.

1. On a $z_*^7 = e^{2i\pi} = 1$ et $z_* \neq 1$, car $\frac{2\pi}{7}$ n'est pas un multiple de 2π . La formule de la somme géométrique donne donc

$$1 + z_* + z_*^2 + \dots + z_*^6 = \frac{1 - z_*^7}{1 - z_*} = 0.$$

2. Comme $|z_*| = 1$, on a $z_* \bar{z}_* = 1$, donc $\bar{z}_* = z_*^{-1}$. Ainsi, $w = z_* + z_*^{-1}$. En développant,

$$w^2 = z_*^2 + 2 + z_*^{-2}, \quad w^3 = z_*^3 + 3z_* + 3z_*^{-1} + z_*^{-3}.$$

On en déduit

$$z_*^2 + z_*^{-2} = w^2 - 2, \quad z_*^3 + z_*^{-3} = w^3 - 3w.$$

Puisque $z_* \neq 0$, on peut diviser la somme de la première question par z_*^3 :

$$(z_*^3 + z_*^{-3}) + (z_*^2 + z_*^{-2}) + (z_* + z_*^{-1}) + 1 = 0.$$

En remplaçant chaque groupe par son expression en fonction de w , on obtient

$$(w^3 - 3w) + (w^2 - 2) + w + 1 = 0,$$

soit $w^3 + w^2 - 2w - 1 = 0$.

3. On a $w = z_* + \bar{z}_* = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$. Comme $0 < \frac{2\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$, ce réel appartient à $]0, 2[$. C'est donc une solution réelle positive de l'équation précédente. Sous l'hypothèse d'unicité donnée dans l'énoncé, on a $w = w_*$.

Écrivons $z_* = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $2x = w_*$ et $x^2 + y^2 = |z_*|^2 = 1$, donc

$$x = \frac{w_*}{2}, \quad y^2 = 1 - \frac{w_*^2}{4}.$$

De plus, $y = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) > 0$. On doit donc choisir la racine carrée positive, d'où

$$z_* = \frac{w_*}{2} + i \frac{\sqrt{4 - w_*^2}}{2}.$$

Le radicande est strictement positif puisque $0 < w_* < 2$. Le signe de la partie imaginaire distingue z_* de son conjugué.

Sujet G

Exercice 1

1. Soit $z \in \mathbb{C}$, simplifier

$$|z - 4|^2 + |z + 4|^2.$$

2. Donner une interprétation géométrique de l'ensemble suivant :

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 4|^2 + |z + 4|^2 = 34\}.$$

Correction.

1. Pour tout nombre complexe u , on a $|u|^2 = u\bar{u}$. Cette identité permet de développer les carrés de modules en utilisant les règles de calcul dans $\mathbb{C}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Puisque 4 est réel,

$$\begin{aligned} |z-4|^2 + |z+4|^2 &= (z-4)(\bar{z}-4) + (z+4)(\bar{z}+4), \\ &= z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16 + z\bar{z} + 4z + 4\bar{z} + 16, \\ &= 2|z|^2 + 32. \end{aligned}$$

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la première question donne

$$|z-4|^2 + |z+4|^2 = 34 \Leftrightarrow 2|z|^2 + 32 = 34 \Leftrightarrow |z| = 1,$$

la dernière équivalence utilisant $|z| \geq 0$. L'ensemble est donc le cercle de centre l'origine et de rayon 1.

Exercice 2

1. Écrire $3 - i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique.

2. Simplifier $(3 - i\sqrt{3})^6$.

Correction.

1. Le module de $3 - i\sqrt{3}$ vaut $\sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$. On a donc

$$3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) = 2\sqrt{3} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right).$$

2. D'après la première question et la formule de Moivre,

$$(3 - i\sqrt{3})^6 = (2\sqrt{3})^6 e^{-i\pi} = 64 \times 27 \times (-1) = -1728.$$

Exercice 3

Déterminer les racines carrées de $5 - i\sqrt{2}$.

Correction. *Analyse.* Soit $v = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, tel que $v^2 = 5 - i\sqrt{2}$. Le module de ce dernier nombre vaut $\sqrt{25+2} = 3\sqrt{3}$. On obtient donc

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ x^2 + y^2 = 3\sqrt{3}, \\ 2xy = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Ainsi,

$$x^2 = \frac{3\sqrt{3}+5}{2}, \quad y^2 = \frac{3\sqrt{3}-5}{2}, \quad xy = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Comme $3\sqrt{3} > 5$ (les deux nombres sont positifs et $27 > 25$), ces deux carrés sont strictement positifs. Le produit xy étant négatif, les signes de x et y sont opposés. Les seuls candidats sont u et $-u$, où

$$u = p - iq, \quad p = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}+5}{2}}, \quad q = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}-5}{2}}.$$

Synthèse. Les réels p et q sont bien définis et strictement positifs. On a $p^2 - q^2 = 5$ et

$$pq = \sqrt{\frac{(3\sqrt{3})^2 - 25}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donc $u^2 = p^2 - q^2 - 2ipq = 5 - i\sqrt{2}$, et $(-u)^2 = 5 - i\sqrt{2}$. Les racines carrées cherchées sont exactement

$$\sqrt{\frac{3\sqrt{3}+5}{2}} - i\sqrt{\frac{3\sqrt{3}-5}{2}} \quad \text{et son opposé.}$$

Sujet H

Exercice 1

1. En utilisant deux méthodes différentes, déterminer les racines carrées du nombre complexe $1 - i\sqrt{3}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\frac{1}{4}z^2 - 2iz - 5 + i\sqrt{3} = 0$.

Correction.

1. *Première méthode : forme algébrique.* Écrivons $v = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Comme $|1 - i\sqrt{3}| = 2$, on a

$$v^2 = 1 - i\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = 2, \\ 2xy = -\sqrt{3}. \end{cases}$$

La somme et la différence des deux premières égalités donnent $x^2 = \frac{3}{2}$ et $y^2 = \frac{1}{2}$. La condition sur le produit impose des signes opposés. Parmi les quatre couples ayant ces carrés de coordonnées, seuls

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

vérifient $2xy = -\sqrt{3}$. Les racines carrées sont donc exactement $\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et son opposé.

Deuxième méthode : forme exponentielle. On a

$$1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Une racine carrée est donc $u = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$, puisque $u^2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$. L'autre est $-u$, et ce sont les seules : $v^2 = u^2$ équivaut à $(v - u)(v + u) = 0$. On retrouve

$$u = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}.$$

2. On multiplie l'équation par 4, puis on complète le carré :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}z^2 - 2iz - 5 + i\sqrt{3} = 0 &\Leftrightarrow z^2 - 8iz - 20 + 4i\sqrt{3} = 0, \\ &\Leftrightarrow (z - 4i)^2 = 4(1 - i\sqrt{3}), \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{z - 4i}{2}\right)^2 = 1 - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

D'après la première question, on doit donc avoir $\frac{z-4i}{2} = u$ ou $\frac{z-4i}{2} = -u$, soit $z = 4i + 2u$ ou $z = 4i - 2u$. Les solutions sont ainsi

$$z = \sqrt{6} + i(4 - \sqrt{2}) \quad \text{ou} \quad z = -\sqrt{6} + i(4 + \sqrt{2}).$$