Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence $1^{\text{ère}}$ année, 2025-2026, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)
Ensemble des sujets de l'interro no2

Sujet A

Exercice 1

1. Soit $z_1 = \frac{2i+2\sqrt{3}}{-4i}$. Trouver les $v = x + iy$ avec x et y réels tel que $v^2 = z_1$.

2. Soit $w = e^{i\pi/3}$. Ecrire w sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique. En déduire que w est une racine carrée de z_1, et l'expression de z_1 sous forme exponentielle.

3. Montrer que $e^{2i\pi/3} = -\cos(-\pi/3) - i\sin(-\pi/3)$.

4. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z définis par : $E = \left\{M(z), |z - 1 - i\sqrt{3}(1+z)| = 2\right\}$, ainsi qu'un point évident de E. (Il n'est pas demandé de représenter E graphiquement). Indice : on pourra faire apparaitre l'expression de w.

Sujet B

Exercice 1

Soit $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1\}$. Construire une surjection définie sur A dont l'ensemble d'arrivée est B.

Exercice 2

Calculer les racines carrées de $z = 16i - 12$.

Exercice 3

Mettre le nombre complexe suivant sous forme trigonométrique $z = (-4 - i4\sqrt{3})^3$.

Exercice 4

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer le module et l'argument principal de $z = e^{-i\theta} + e^{3i\theta}$.

Sujet C

Exercice 1

1. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Rappeler les définitions d'injectivité, surjectivité et bijectivité, ainsi que leurs négations.

2. Soit $A = \{\pi, \sqrt{3}, 10\}$ et $B = \{0, 1\}$.

   a) Est-il possible de construire une surjection de A vers B ? Si oui, construire une telle surjection. Si non, donner une courte justification.

   b) Est-il possible de construire une injection de A vers B ? Si oui, construire une telle injection. Si non, donner une courte justification.

Exercice 2

1. Donner la partie réelle, la partie imaginaire, le conjugué et le module des complexes suivants.

   a) $z_1 = -6i - 2$.

   b) $z_2 = 9$.

   c) $z_3 = i(2 + 3i)$.

d) $z_4 = 3i$.

2. Donner le module et un argument des complexes suivants.

a) $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \times 3e^{i\frac{\pi}{2}}$.

b) $z_2 = i^{34}$.

c) $z_3 = e^{e^{i\beta}}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

1. Mettre sous forme algébrique $z_1 = \frac{2-i}{1+i}$.

2. Mettre sous forme exponentielle $z_2 = 1 - i$.

Sujet D

Exercice 1

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants.

1. $\frac{5+5i}{1-2i} + 1$.

2. $(1-i)^3$.

Exercice 2

Simplifier l'ensemble suivant, puis en donner une interprétation géométrique et le représenter dans le plan complexe.

$$E = \{z \in \mathbb{C} : |2z + i| = 4\}.$$

Exercice 3

1. Déterminer les racines carrées de $2 - 2\sqrt{3}i$.

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation suivante

$$z^2 + \sqrt{2}z + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0.$$

Sujet E

Exercice 1

Soit $z = 1 - i\sqrt{3}$. Calculez z^{10}.

Exercice 2

Résolvez dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 - (4-i)z + 5 + i = 0$.

2. $z^4 + z^3 + z^2 + z = 0$.

Exercice 3

Soient $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i$.

1. Exprimez z_1 et z_2 sous forme exponentielle complexe

$$z = r\,e^{i\theta} \quad \text{avec } r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in]-\pi, \pi].$$

2. Soit

$$Z = \frac{z_1}{z_2}.$$

Exprimez d'abord Z sous forme algébrique. Ensuite, en utilisant les résultats de la question 1, exprimez Z sous forme exponentielle.

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 4
Soit

$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z + 1 - 2i) = 0 \ [2\pi]\}.$$

1. Que peut-on dire de la partie imaginaire de z pour $z \in E$?

2. Donnez une interprétation géométrique de cet ensemble dans le plan complexe.

Sujet F

Exercice 1 (Géométrie complexe)
Déterminer les ensembles A et B des points d'affixe z définis par :

$$A = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Im}\big((1+i)z\big) = 0\},$$
$$B = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z + iz - 1| = \sqrt{2}\}.$$

Donner pour chacun des ensembles une interprétation géométrique.

Exercice 2 (Calculs trigonométriques)
1. Calculer sous forme algébrique les racines carrées de

$$\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

En déduire les valeurs de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2. Démontrer l'identité

$$\sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta).$$

Vérifier votre résultat à partir de la première partie.

Exercice 3 (Équations complexes)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.
1. $z^2 - i = 0$.
2. $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i = 0$.

Exercice 4 Bonus - Racines $7^{\text{ème}}$ de l'unité
Soit $z_* = e^{\frac{2\pi i}{7}}$.
1. Calculer

$$1 + z_* + z_*^2 + z_*^3 + z_*^4 + z_*^5 + z_*^6.$$

2. Posons $w = z_* + \bar{z}_*$. Montrer que $w = z_* + z_*^{-1}$ et que

$$w^3 + w^2 - 2w - 1 = 0.$$

3. Si l'équation $w^3 + w^2 - 2w - 1 = 0$ admet une unique solution réelle positive notée w_*, avec $0 < w_* < 2$, écrire la forme algébrique de z_* en fonction de w_*.

Sujet G

Exercice 1

1. Soit $z \in \mathbb{C}$, simplifier
$$|z-4|^2 + |z+4|^2.$$
2. Donner une interprétation géométrique de l'ensemble suivant :
$$\left\{ z \in \mathbb{C} \, : \, |z-4|^2 + |z+4|^2 = 34 \right\}.$$

Exercice 2

1. Écrire $3 - i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique.
2. Simplifier $(3 - i\sqrt{3})^6$.

Exercice 3

Déterminer les racines carrées de $5 - i\sqrt{2}$.

Sujet H

Exercice 1

1. En utilisant deux méthodes différentes, déterminer les racines carrées du nombre complexe $1 - i\sqrt{3}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\frac{1}{4}z^2 - 2iz - 5 + i\sqrt{3} = 0$.