

Licence 1^{ère} année, 2026–2027, MATHÉMATIQUES ET CALCUL 1 (MC1)

Ensemble des sujets de l'interro n°1

SUJET A

Exercice 1

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier chaque réponse.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad xy = 1.$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x \leq y^2.$

Exercice 2

Représenter graphiquement les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq |x|, x^2 + y^2 \leq 4\}.$
2. $\{(x, \frac{x}{2}) / x \in \mathbb{R}_+\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq y \leq 2\}.$

Exercice 3

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs l'assertion suivante ainsi que sa négation :

Si A est inclus dans B , alors A est minoré.

SUJET B

Exercice 1

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier chaque réponse.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y^2 = 0.$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x \geq y^2.$

Exercice 2

Représenter graphiquement les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq |x|, x^2 + y^2 \leq 4\}.$
2. $\{(x, -x) / x \in \mathbb{R}_-\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 2\}.$

Exercice 3

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs l'assertion suivante ainsi que sa négation :

Si A n'est pas inclus dans B , alors B est majoré.

Sujet C

Exercice 1

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier chaque réponse.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \leq x$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y - 1$.

Exercice 2

Représenter graphiquement les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

1. $A_1 = \{(x, 2x) / x \in \mathbb{R}_+\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq y \leq 1\}$.
2. $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$.

Exercice 3

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs l'assertion suivante ainsi que sa négation :

Si A est minoré, alors A est inclus dans B .

Sujet D

Exercice 1

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier chaque réponse.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \leq x + 10$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y - 2$.

Exercice 2

Représenter graphiquement les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

1. $A_1 = \{(x, x^2) / x \in \mathbb{R}_-\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq y \leq 1\}$.
2. $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > y\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$.

Exercice 3

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs l'assertion suivante ainsi que sa négation :

Si A est majoré, alors B est inclus dans A .

Sujet E

Exercice 1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On définit

$$J_a = \{x + a / x \in I\}.$$

1. Rappeler la définition d'un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour tout $w \in \mathbb{R}$,

$$w \in J_a \Leftrightarrow w - a \in I.$$

3. En déduire que J_a est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Traduire à l'aide de quantificateurs l'assertion « A est majorée ».

Exercice 3

On rappelle que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad |u| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < u < a.$$

Déterminer l'ensemble

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 1| < 3\}.$$

Exercice 4 (Bonus)

Montrer que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left] -\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} \right[= \{0\}.$$

SUJET F

Exercice 1

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $E(x)$ la partie entière de x . Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier chaque réponse.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad y + 3 < x.$
2. $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad E(kx) = kE(x).$

Exercice 2

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1. Écrire à l'aide de quantificateurs l'assertion « A est minoré » ainsi que sa négation.
2. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs n'est pas minoré.

SUJET G

Exercice 1

Écrire la négation de l'assertion suivante, puis déterminer si l'assertion initiale est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + 1 < y.$$

Exercice 2

Représenter graphiquement le sous-ensemble $] -1, 1] \times \mathbb{R}_+$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $E(x)$ la partie entière de x . L'assertion suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad E(kx) = kE(x).$$

Exercice 4

Soient A , B et C trois sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Montrer que, si $A \subset C$ et $B \subset C$, alors $A \cup B \subset C$.

Exercice 5

Soient B un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset B) \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset B.$$

SUJET H

Exercice 1

On rappelle qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit **stable par multiplication** si

$$\forall x \in A, \forall y \in A, \quad xy \in A. \quad (1)$$

1. Écrire la négation de l'assertion (1).
2. Montrer que le sous-ensemble $[1, 2]$ n'est pas stable par multiplication.
3. Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ stables par multiplication. Montrer que $A \cap B$ est stable par multiplication.

Exercice 2

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier chaque réponse.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in [1, +\infty[, \quad x \leq xy.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y = 1.$