

Licence 1^{ère} année, 2025-2026, MATHÉMATIQUES ET CALCUL 1 (MC1)

Ensemble des sujets de l'interro n°1

SUJET A

Exercice 1 (Logique et quantificateurs)

1. Écrire la négation de l'assertion suivante :

$$\forall x \in]0, 1[, \forall y \in [-1, 0[, \quad xy \in]-1, 0[.$$

2. Traduire à l'aide de quantificateurs l'assertion suivante ainsi que sa négation. Soit $A \subset \mathbb{R}$. A est **bornée** (c'est-à-dire, A est majorée, et A est minorée.)

Correction. Pour nier une assertion quantifiée, on échange $\forall$ et $\exists$, sans changer leur ordre, puis on nie la propriété. La négation de « P et Q » est « non P ou non Q ».

1. La négation est

$$\exists x \in]0, 1[, \exists y \in [-1, 0[, \quad xy \notin]-1, 0[.$$

On peut aussi écrire la dernière condition sous la forme $xy \leq -1$ ou $xy \geq 0$. Les domaines de x et y restent les mêmes : on cherche un couple dans les intervalles de l'énoncé pour lequel le produit n'appartient pas à $] -1, 0[$.

2. En suivant la précision de l'énoncé, l'assertion « A est bornée » s'écrit

$$\exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, \quad m \leq a \leq M.$$

Sa négation est donc

$$\forall m \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathbb{R}, \exists a \in A, \quad a < m \text{ ou } a > M.$$

Cela signifie que A n'est pas minorée ou que A n'est pas majorée. Il n'est pas nécessaire que ces deux propriétés soient vraies simultanément : par exemple, $[0, +\infty[$ est minoré, mais n'est pas borné.

Avec la définition du cours, qui utilise la valeur absolue, l'assertion « A est bornée » s'écrit

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall a \in A, \quad |a| \leq M.$$

Pour cette formulation de la question, la négation est

$$\forall M \in \mathbb{R}_+, \exists a \in A, \quad |a| > M.$$

Autrement dit, quel que soit le seuil $M \geq 0$, on peut trouver un élément de A dont la valeur absolue dépasse strictement M .

Exercice 2 (Réunion d'intervalles)

Soit

$$I := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{n-1}{n+1} \right].$$

Montrer, par double inclusion, que $I = [0, 1[$.

Correction. Par définition d'une réunion, $x \in I$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 \leq x \leq \frac{n-1}{n+1}$. Pour montrer une égalité d'ensembles par double inclusion, on démontre successivement chacune des deux inclusions.

($\subset$). Montrons que $I \subset [0, 1[$. Soit $x \in I$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 \leq x \leq \frac{n-1}{n+1}$. Comme $n \geq 1$, on a

$$0 \leq \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} < 1.$$

Donc $0 \leq x < 1$, soit $x \in [0, 1[$. Ainsi, $I \subset [0, 1[$.

($\supset$). Montrons que $[0, 1[\subset I$. Soit $x \in [0, 1[$. On cherche un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \left[0, \frac{n-1}{n+1}\right]$. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons qu'un tel entier n existe. Alors $x \leq \frac{n-1}{n+1}$. Puisque $n+1 > 0$, on obtient $x(n+1) \leq n-1$, soit

$$n(1-x) \geq 1+x.$$

Comme $1-x > 0$, on en déduit

$$n \geq \frac{1+x}{1-x}.$$

Il faut donc chercher un entier supérieur ou égal à ce seuil, qui dépend de x .

La partie entière permet de construire un tel entier sans utiliser de résultat sur les limites.

Synthèse. Posons $N = E\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + 1$, où E désigne la fonction partie entière. Vérifions que cet entier convient. Puisque $0 \leq x < 1$, le quotient est bien défini et $\frac{1+x}{1-x} \geq 1$, donc $N \in \mathbb{N}^*$. Par définition de la partie entière,

$$N > \frac{1+x}{1-x}.$$

En multipliant par $1-x > 0$, on obtient $N(1-x) > 1+x$, soit $N-1 > x(N+1)$. Comme $N+1 > 0$, il vient

$$x < \frac{N-1}{N+1}.$$

Avec $x \geq 0$, cela donne $x \in \left[0, \frac{N-1}{N+1}\right]$, donc $x \in I$.

Ainsi, tout $x \in [0, 1[$ appartient à I , ce qui prouve que $[0, 1[\subset I$.

Les deux inclusions donnent finalement $I = [0, 1[$.

Exercice 3 (Bijections)

- Donner une bijection de $\{1, 2, 3\}$ vers $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$.
- Donner une bijection de $[1, +\infty[$ vers $]0, 1]$, et montrer que votre application est bijective.

Correction. Une application est bijective si tout élément de son ensemble d'arrivée admet un unique antécédent dans son ensemble de départ. Il faut aussi vérifier que la formule choisie définit bien une application entre les ensembles annoncés.

- Définissons

$$\begin{aligned} f : \{1, 2, 3\} &\longrightarrow \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\} \\ k &\longmapsto \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Les images de 1, 2 et 3 sont respectivement 1, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. Chaque élément de l'ensemble d'arrivée apparaît exactement une fois : f est donc bijective.

- Considérons de même

$$\begin{aligned} g : [1, +\infty[&\longrightarrow]0, 1] \\ x &\longmapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \geq 1$, le nombre x est non nul et $0 < \frac{1}{x} \leq 1$. L'application g est donc bien définie.

Soit $y \in]0, 1]$. Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a

$$g(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{y},$$

car x et y sont non nuls. De plus, $0 < y \leq 1$ implique $\frac{1}{y} \geq 1$, donc $\frac{1}{y}$ appartient bien à l'ensemble de départ. Ainsi, tout $y \in]0, 1]$ possède un unique antécédent par g , à savoir $\frac{1}{y}$. L'application g est donc bijective.

Exercice 4 (Bonus - Partie fractionnaire)

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, définir la **partie fractionnaire** (notée $F(x)$). Par exemple $F(2.3) = 0.3$, $F(3) = 0$, $F(-1.1) = 0.9$.
2. Représenter le graphe de la fonction $x \mapsto F(x)$.
3. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $F(x + k) = F(x)$.
4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. A-t-on en général $F(x + y) = F(x) + F(y)$? Justifier.

Correction.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la partie entière $E(x)$ est l'unique entier tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$. La partie fractionnaire de x est le réel

$$F(x) = x - E(x).$$

En retranchant $E(x)$ dans l'encadrement précédent, on obtient $0 \leq F(x) < 1$.

En particulier, $E(-\frac{11}{10}) = -2$, donc $F(-\frac{11}{10}) = -\frac{11}{10} + 2 = \frac{9}{10}$. Pour un réel négatif, il ne suffit pas de supprimer le signe et la partie située avant la virgule.

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in [n, n + 1[$, on a $E(x) = n$, donc $F(x) = x - n$. Le graphe est ainsi la réunion des segments de pente 1 allant de $(n, 0)$ inclus à $(n + 1, 1)$ exclu, pour $n \in \mathbb{Z}$. La Figure 1 en représente quelques-uns. Aux abscisses entières, la valeur de F est 0, et non 1.

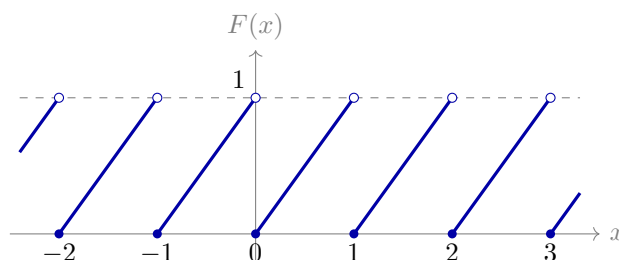


FIGURE 1. Graphe de la partie fractionnaire. Les points pleins sont inclus ; les points creux sont exclus.

3. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. En ajoutant k dans l'encadrement caractérisant $E(x)$, on obtient

$$E(x) + k \leq x + k < E(x) + k + 1.$$

Comme $E(x) + k \in \mathbb{Z}$, l'unicité de la partie entière donne $E(x + k) = E(x) + k$. Par conséquent,

$$F(x + k) = x + k - E(x + k) = x + k - E(x) - k = F(x).$$

En particulier, $F(x + 1) = F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: la fonction F est 1-périodique, ce que l'on observe sur la figure.

4. Non. Prenons $x = y = \frac{1}{2}$. Alors $F(x) + F(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, tandis que $F(x + y) = F(1) = 0$. L'égalité n'est donc pas vraie pour tous les réels x, y .

SUJET B

Exercice 1

Soit

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 3\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 10\}.$$

1. Montrez que $A \subset B$.
2. Déterminez, s'il existent, un majorant de A et un majorant de B .

Correction.

1. Soit $x \in A$. Alors $1 < x \leq 3$. En particulier, $x > 0$, donc $|x| = x \leq 3 < 10$. Ainsi, $x \in B$. On a bien montré que $A \subset B$.
2. Pour tout $x \in A$, on a $x \leq 3$, donc 3 est un majorant de A . Pour tout $x \in B$, on a $x \leq |x| < 10$, donc 10 est un majorant de B .

Un majorant d'une partie de $\mathbb{R}$ est un réel supérieur ou égal à chacun de ses éléments. Il n'est pas nécessaire que ce majorant appartienne à l'ensemble : ici, $10 \notin B$.

Exercice 2

Soit $I \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$.

1. Donner la définition formelle (avec quantificateurs) de ce que signifie que I est un intervalle, puis écrire la négation de cette définition.
2. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle.

Correction.

1. Par définition, I est un intervalle si

$$\forall x \in I, \forall y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, \quad (x \leq z \leq y \implies z \in I).$$

Un intervalle contient tous les réels situés entre deux de ses éléments quelconques. Pour deux assertions P, Q , l'implication $P \implies Q$ équivaut à « non P ou Q ». En utilisant les lois de De Morgan, on obtient donc

$$\neg(P \implies Q) \iff \neg(\neg P \text{ ou } Q) \iff (P \text{ et } \neg Q).$$

C'est pourquoi, pour nier la définition d'un intervalle, on conserve l'encadrement et on nie l'appartenance.

La négation de la définition est donc

$$\exists x \in I, \exists y \in I, \exists z \in \mathbb{R}, \quad x \leq z \leq y \text{ et } z \notin I.$$

2. Les nombres 0 et 1 appartiennent à $\mathbb{Z}$, et $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$, mais $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Ces trois nombres vérifient la négation de la définition précédente. Ainsi, $\mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ tels que $A \subset B$.

Montrez que si A n'est pas majoré, alors B n'est pas majoré.

Correction. Par définition, une partie A de $\mathbb{R}$ est majorée si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, \quad a \leq M.$$

En niant cette assertion, on obtient que A n'est pas majorée si et seulement si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists a \in A, \quad a > M.$$

Quel que soit le majorant proposé, on peut donc trouver dans A un élément strictement plus grand.

Supposons que A ne soit pas majoré. Soit $M \in \mathbb{R}$. Il existe $a \in A$ tel que $a > M$. Comme $A \subset B$, on a aussi $a \in B$. Ainsi, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe un élément de B strictement supérieur à M . Cela prouve que B n'est pas majoré.

Exercice 4

Soit $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ l'application définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, F(n) = n^2.$$

Montrez que F est injective.

Correction. Par définition, F est injective si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \quad (F(n) = F(m) \implies n = m).$$

Cette écriture dicte la rédaction : on fixe deux entiers naturels quelconques n, m , on suppose qu'ils ont la même image et on montre qu'ils sont égaux.

Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Supposons que $F(n) = F(m)$. Alors $n^2 = m^2$, donc

$$(n - m)(n + m) = 0.$$

Un produit de réels est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. On a donc $n = m$ ou $n + m = 0$. Dans le second cas, puisque $n, m \geq 0$, on obtient $n = m = 0$, et donc encore $n = m$.

Ainsi, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, l'égalité $F(n) = F(m)$ implique $n = m$. L'application F est donc injective.

L'ensemble de départ est essentiel : l'application $n \mapsto n^2$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas injective, puisque 1 et -1 sont distincts et ont la même image.

SUJET C

Exercice 1

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Le démontrer.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x - y > 0$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in [2; +\infty[, x < y$.

Correction.

1. Faux. Les réels $x = 1$ et $y = 0$ donnent $x + y = 1 > 0$, ce qui contredit l'inégalité annoncée pour tous les couples de réels.

2. Vrai. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = x - 1$. Alors $y \in \mathbb{R}$ et

$$x - y = x - (x - 1) = 1 > 0.$$

Ainsi, pour tout réel x , il existe bien un réel y tel que $x - y > 0$.

3. Vrai. Prenons $x = 1$. Soit $y \in [2, +\infty[$. Alors $y \geq 2 > 1 = x$, donc $x < y$. Ce même réel $x = 1$ convient pour tous les y de l'intervalle.

Dans la deuxième assertion, on choisit y après avoir fixé x : y peut dépendre de x . Dans la troisième, il faut choisir un seul x qui convienne à tous les y .

Exercice 2

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que

$$(B \subset A \text{ et } \forall a \in A, a \leq 1) \implies (\forall b \in B, b \leq 1) \quad (1)$$

2. Ecrire la négation de l'assertion (1).

Correction.

1. Supposons que $B \subset A$ et que, pour tout $a \in A$, on ait $a \leq 1$. Soit $b \in B$. Comme $B \subset A$, on a $b \in A$, donc $b \leq 1$. Ainsi, pour tout $b \in B$, on a $b \leq 1$, ce qui prouve l'implication (1).

2. Pour deux assertions P, Q , l'implication $P \implies Q$ équivaut à « non P ou Q ». Sa négation se déduit donc des lois de De Morgan :

$$\neg(P \implies Q) \iff \neg(\neg P \text{ ou } Q) \iff (P \text{ et } \neg Q).$$

On conserve donc l'hypothèse de l'implication et on nie sa conclusion.

La négation de (1) est

$$B \subset A \text{ et } (\forall a \in A, a \leq 1) \text{ et } (\exists b \in B, b > 1).$$

Cette assertion est fausse : si un tel b existait, il appartiendrait à A , donc vérifierait aussi $b \leq 1$. Cela est cohérent avec la première question, où l'on a démontré l'implication.

Exercice 1

Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Est-ce que les assertions suivantes ont du sens mathématiquement ? Donner une courte justification.

- | | | |
|------------------|----------------------|--------------------------|
| 1. $a \in E$ | 3. $\{a\} \subset E$ | 5. $\emptyset \in E$ |
| 2. $a \subset E$ | 4. $(a, b) \in E$ | 6. $\emptyset \subset E$ |

Correction. L'appartenance $u \in E$ signifie que u est un élément de E . L'inclusion $A \subset E$ compare deux ensembles : elle signifie que tout élément de A appartient à E . Il faut distinguer une écriture qui a un sens d'une assertion vraie ou fausse.

Dans la lecture attendue de cet exercice, on considère a, b, c comme des objets élémentaires, qui ne sont ni des ensembles ni des couples.

- $a \in E$ a un sens et est vraie, puisque $E = \{a, b, c\}$.
- $a \subset E$ n'est pas une écriture adaptée dans ce cadre : une inclusion compare deux ensembles, alors que a n'est pas considéré ici comme un ensemble.
- $\{a\} \subset E$ a un sens et est vraie : le seul élément de $\{a\}$ est a , et $a \in E$.
- $(a, b) \in E$ a un sens, mais est fausse dans la lecture retenue : aucun des éléments a, b, c n'est un couple. En revanche, $(a, b) \in E \times E$, puisque $a \in E$ et $b \in E$.
- $\emptyset \in E$ a un sens, mais est fausse dans la lecture retenue : aucun des éléments a, b, c n'est l'ensemble vide.
- $\emptyset \subset E$ a un sens et est vraie. En effet, aucun élément de l'ensemble vide ne peut manquer à E : l'assertion « pour tout $x \in \emptyset$, $x \in E$ » est vraie.

La convention précédente est implicite dans l'énoncé. Sans elle, les réponses aux questions 2, 4 et 5 peuvent changer. Par exemple, si $a = \{1\}$, $b = 1$ et $c = 2$, alors $E = \{\{1\}, 1, 2\}$ et $a \subset E$, puisque $1 \in E$. Un ensemble peut donc être à la fois un élément et un sous-ensemble d'un même ensemble.

Exercice 2

- Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner une courte justification.

- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

- Donner leurs négations.

Correction.

- Faux. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $y = -x \in \mathbb{R}$, on a $x + y = 0$, donc $x + y > 0$ n'est pas vraie pour tous les réels y . Cela vaut pour tout $x \in \mathbb{R}$: il n'existe donc aucun x satisfaisant l'assertion.
 - Faux. Le couple $x = y = 0$ donne $x + y = 0$, et non $x + y > 0$.
 - Vrai. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = 1 - x \in \mathbb{R}$. Alors $x + y = 1 > 0$. Ainsi, pour tout réel x , on a construit un réel y qui convient.
- Les négations sont respectivement
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y \leq 0$;
 - $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y \leq 0$;
 - $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y \leq 0$.

Les deux premières négations sont vraies, comme le montrent les choix de la première question. La troisième est fausse : pour chaque x , le choix $y = 1 - x$ donne une somme strictement positive.

Exercice 3

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée.
2. f ne s'annule jamais.
3. f n'est pas la fonction nulle.
4. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts.

Correction.

1. f est majorée si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq M.$$

Le même réel M doit majorer toutes les valeurs de f .

2. f ne s'annule jamais si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 0.$$

3. Dire que f est la fonction nulle signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = 0$. En niant cette assertion, on obtient

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 0.$$

4. Deux points distincts ont des images distinctes si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad (x \neq y \implies f(x) \neq f(y)).$$

C'est une formulation de l'injectivité de f .

« Ne jamais s'annuler » est plus fort que « ne pas être la fonction nulle ». Par exemple, la fonction $x \mapsto x$ n'est pas la fonction nulle, mais elle s'annule en 0.

SUJET E

Exercice 1

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad y^2 \leq x$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x \geq y - 1$

Correction.

1. Faux. Prenons $x = -1$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $y^2 \geq 0 > -1 = x$. Il n'existe donc pas de réel y tel que $y^2 \leq x$ pour ce choix de x .
2. Faux. Montrons sa négation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x < y - 1.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = x + 2$. Alors $y \in \mathbb{R}$ et $y - 1 = x + 1 > x$. Ainsi, aucun réel x ne peut vérifier $x \geq y - 1$ pour tous les réels y .

Exercice 2

Représenter graphiquement les sous ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

1. $A_1 = \{(x, 2x) / x \geq 0\} \cup \{(x, y) / -1 \leq y \leq 1\}$
2. $A_2 = \{(x, y) / y \geq x\} \cap \{(x, y) / (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$

Correction. Une réunion correspond au connecteur « ou » : il suffit d'appartenir à l'un des deux ensembles. Une intersection correspond au connecteur « et » : les deux conditions doivent être satisfaites simultanément.

1. L'ensemble $\{(x, 2x) / x \geq 0\}$ est la demi-droite d'origine $(0, 0)$, incluse, portée par la droite d'équation $y = 2x$ et dirigée vers les abscisses positives. L'ensemble $\{(x, y) / -1 \leq y \leq 1\}$ est la bande horizontale comprise entre les droites $y = -1$ et $y = 1$, frontières incluses.

Ainsi, A_1 est la réunion de cette bande et de cette demi-droite. La portion de la demi-droite correspondant à $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ est déjà dans la bande ; au-delà de $(\frac{1}{2}, 1)$, on ajoute seulement la demi-droite, et non toute une région du plan.

2. L'inégalité $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$ décrit le disque fermé de centre $(1, 1)$ et de rayon 1. La condition $y \geq x$ décrit le demi-plan fermé situé au-dessus de la droite $y = x$.

Cette droite passe par le centre du disque. L'ensemble A_2 est donc le demi-disque situé du côté $y \geq x$, arc de cercle et diamètre inclus. Par exemple, $(1, 2)$ lui appartient, contrairement à $(2, 1)$.

La Figure 2 représente les deux ensembles. Les zones bleues et les traits bleus pleins appartiennent aux ensembles ; les pointillés gris servent seulement à la construction.

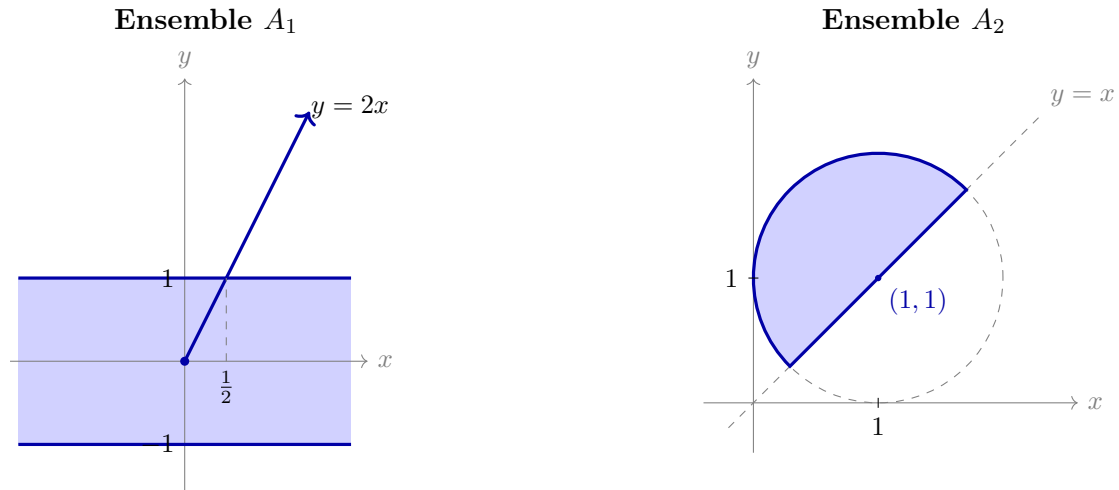


FIGURE 2. À gauche, une bande réunie à une demi-droite ; à droite, l'intersection d'un disque et d'un demi-plan.

Exercice 3

Soient A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$. Ecrire à l'aide de quantificateurs l'assertion suivante, ainsi que sa négation.

1. Si A est minoré, alors A est inclus dans B .

Correction. L'assertion s'écrit

$$(\exists m \in \mathbb{R}, \forall a \in A, m \leq a) \implies (\forall a \in A, a \in B).$$

La négation est ainsi

$$(\exists m \in \mathbb{R}, \forall a \in A, m \leq a) \quad \text{et} \quad (\exists a_0 \in A, a_0 \notin B).$$

Autrement dit, A est minoré et possède au moins un élément qui n'appartient pas à B .

Sujet F

Exercice 1

1. Écrire à l'aide de quantificateurs l'assertion suivante puis la démontrer :

L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

2. Soient A un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$ et $B = \{x + 1 \mid x \in A\}$. Démontrer que B est majoré.
 3. Démontrer l'inégalité triangulaire : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$.
 4. Soit $f : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x + y$. Démontrer que f est surjective.

Correction.

1. L'assertion « $\mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ » s'écrit

$$\exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, \exists t \in \mathbb{R}, \quad a \leq t \leq b \text{ et } t \notin \mathbb{Z}.$$

En effet, c'est la négation de la propriété caractérisant un intervalle : tout réel situé entre deux de ses éléments appartient encore à l'ensemble.

Prenons $a = 0$, $b = 1$ et $t = \frac{1}{2}$. Alors $a, b \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$, $a \leq t \leq b$, mais $t \notin \mathbb{Z}$. L'assertion est donc vraie : $\mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

2. Comme A est majoré, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $a \in A$, on ait $a \leq M$. Montrons que $M + 1$ majore B .

Soit $b \in B$. Par définition de B , il existe $a \in A$ tel que $b = a + 1$. On a donc $b = a + 1 \leq M + 1$. Ainsi, tout élément de B est inférieur ou égal au même réel $M + 1$, ce qui prouve que B est majoré.

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Par définition de la valeur absolue,

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad \text{et} \quad -|y| \leq y \leq |y|.$$

En additionnant ces encadrements, on obtient

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Pour un réel u et un réel $r \geq 0$, l'encadrement $-r \leq u \leq r$ équivaut à $|u| \leq r$.

Comme $|x| + |y| \geq 0$, on en déduit $|x + y| \leq |x| + |y|$. Cela démontre l'inégalité triangulaire pour tous les réels x, y .

4. L'ensemble de départ est ici un produit cartésien. La surjectivité signifie que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exists (x, y) \in \mathbb{R} \times [0, 1], \quad x + y = t.$$

Un antécédent est donc un couple (x, y) . Pour que ce couple appartienne à l'ensemble de départ, il faut vérifier que $x \in \mathbb{R}$ et que $y \in [0, 1]$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Prenons $(x, y) = (t, 0)$. Comme $t \in \mathbb{R}$ et $0 \in [0, 1]$, ce couple appartient bien à l'ensemble de départ. De plus, $f(t, 0) = t + 0 = t$. Ainsi, tout réel t possède au moins un antécédent par f . L'application f est donc surjective.