

Licence 1^{ère} année, 2025-2026, MATHÉMATIQUES ET CALCUL 1 (MC1)

Ensemble des sujets de l'interro no1

SUJET A

Exercice 1 (Logique et quantificateurs)

1. Écrire la négation de l'assertion suivante :

$$\forall x \in]0, 1[, \left(\forall y \in [-1, 0[\Rightarrow xy \in]-1, 0[\right).$$

2. Traduire à l'aide de quantificateurs l'assertion suivante ainsi que sa négation. Soit $A \subset \mathbb{R}$. A est **bornée** (c'est-à-dire, A est majorée, et A est minorée.)

Exercice 2 (Réunion d'intervalles)

Soit

$$I := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{n-1}{n+1} \right].$$

Montrer, par double inclusion, que $I = [0, 1[$.

Exercice 3 (Bijections)

1. Donner une bijection de $\{1, 2, 3\}$ vers $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$.
2. Donner une bijection de $[1, +\infty[$ vers $]0, 1]$, et montrer que votre application est bijective.

Exercice 4 (Bonus - Partie fractionnaire)

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, définir la **partie fractionnaire** (notée $F(x)$). Par exemple $F(2.3) = 0.3$, $F(3) = 0$, $F(-1.1) = 0.9$.
2. Représenter le graphe de la fonction $x \mapsto F(x)$.
3. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $F(x+k) = F(x)$.
4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. A-t-on en général $F(x+y) = F(x) + F(y)$? Justifier.

SUJET B

Exercice 1

Soit

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 3\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 10\}.$$

1. Montrez que $A \subset B$.
2. Déterminez, s'il existent, un majorant de A et un majorant de B .

Exercice 2

Soit $I \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$.

1. Donner la définition formelle (avec quantificateurs) de ce que signifie que I est un intervalle, puis écrire la négation de cette définition.
2. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle.

Exercice 3

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ tels que $A \subset B$.

Montrez que si A n'est pas majoré, alors B n'est pas majoré.

Exercice 4

Soit $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ l'application définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, F(n) = n^2.$$

Montrez que F est injective.

Sujet C

Exercice 1

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Le démontrer.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x - y > 0$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in [2; +\infty[, x < y$.

Exercice 2

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que

$$(B \subset A \text{ et } \forall a \in A, a \leq 1) \implies (\forall b \in B, b \leq 1) \quad (1)$$

2. Ecrire la négation de l'assertion (1).

Sujet D

Exercice 1

Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Est-ce que les assertions suivantes ont du sens mathématiquement ? Donner une courte justification.

1. $a \in E$
2. $a \subset E$
3. $\{a\} \subset E$
4. $(a, b) \in E$
5. $\emptyset \in E$
6. $\emptyset \subset E$

Exercice 2

1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner une courte justification.

- a) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
- b) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
- c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

2. Donner leurs négations.

Exercice 3

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée.
2. f ne s'annule jamais.

3. f n'est pas la fonction nulle.
4. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts.

SUJET E

Exercice 1

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \leq x$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y - 1$

Exercice 2

Représenter graphiquement les sous ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

1. $A_1 = \{(x, 2x) / x \geq 0\} \cup \{(x, y) / -1 \leq y \leq 1\}$
2. $A_2 = \{(x, y) / y \geq x\} \cap \{(x, y) / (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$

Exercice 3

Soient A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$. Ecrire à l'aide de quantificateurs l'assertion suivante, ainsi que sa négation.

1. Si A est minoré, alors A est inclus dans B.

SUJET F

Exercice 1

1. Écrire à l'aide de quantificateurs l'assertion suivante puis la démontrer :

L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

2. Soient A un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$ et $B = \{x + 1 / x \in A\}$. Démontrer que B est majoré.
3. Démontrer l'inégalité triangulaire : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x; y) = x + y$. Démontrer que f est surjective.