Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 1$^{\text{ère}}$ année, 2025-2026, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Contrôle terminal, lundi 5 janvier 2025

Durée 2h ou 2h40 pour 1/3 temps.
Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et les téléphones, même à titre d'horloge, sont également interdits.
Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.
Total sujet : 38.5pt. Le barème est uniquement fourni à titre indicatif.

Total : 37.5 = 7 + 4 + 11.5 + 8.5 + 6.5

Exercice 1 (*Melting pot*) (7pt)

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Effectuer les représentations graphiques demandées ci-dessous. *Pour cette question uniquement, aucune justification n'est attendue mis à part les éléments de construction ou calculs que vous jugerez utiles à la compréhension.*
   a) Représenter dans le plan complexe le cercle trigonométrique et y placer les nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 suivants : $z_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $z_2 = -z_1$, $z_3 = i^5$, $z_4 = e^{\frac{i\pi}{6}}$, $z_5 = \overline{z_4}$.
   b) Représenter dans le plan complexe l'ensemble suivant $A = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}(z) = 2\} \cup \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Im}(z) = -1\}$.
   c) Représenter le graphe de la fonction arctan.
   d) Représenter le graphe d'une fonction décroissante et minorée.
2. Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que l'on suppose strictement croissante. Montrer que f est injective.
3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n^n + \cos(n)}{3n^3 - n + 1}.$$
   On considère de plus une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n^2$.
   a) Déterminer un équivalent le plus simple possible de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b) En déduire les limites éventuelles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 (4pt)

Soient $q \in]0,1[$ et $M > 0$. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k \in [0, M]$. On considère alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k q^k$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \dfrac{M}{1-q}$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite.
4. Montrer que $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{M}{1-q}$.

Exercice 3 (8.5pt)

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}e^{-\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition naturel de f.
2. a) Quelle est la limite de f en $+\infty$?
   b) Donner un équivalent le plus simple possible de f en $+\infty$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en précisant bien les règles utilisées pour la justification et calculer sa dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire sa monotonie.
4. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera g le prolongement par continuité obtenu. On prendra soin de définir précisément g.

5. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

6. En étudiant le taux d'accroissement de g en 0, montrer que la fonction g est dérivable en 0. Donner $g'(0)$.

Exercice 4 (11.5pt)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}. \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.

3. On considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} f : & [0,4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{12+x}. \end{array}$$

   a) Justifier que f est dérivable sur $[0,4]$.

   b) Étudier les variations de f sur $[0,4]$.

   c) En déduire, par récurrence, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_{n+1} - 4| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - 4|.$$

5. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n - 4| \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}.$$

6. Montrer, uniquement à l'aide de la définition de la convergence d'une suite, que la suite $\left(\frac{1}{4^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

7. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

8. Uniquement grâce aux résultats des questions 2. et 3., prouver de nouveau la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.

Exercice 5 (6.5pt)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| = 1$ et $P = X^n - wX + 1 \in \mathbb{C}[X]$.

1. Déterminer le polynôme dérivé de P.

2. On veut montrer que P ne peut admettre que des racines simples dans $\mathbb{C}$. On suppose par l'absurde que P admet une racine de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ avec $m \geqslant 2$ et que l'on note $\alpha \in \mathbb{C}$.

   a) Justifier que $n \geqslant 2$.

   b) Montrer que $\alpha = \dfrac{n}{n-1}\overline{w}$ puis que $\alpha^n = \dfrac{1}{n-1}$.

   c) Conclure.

3. a) Justifier que $P = a(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_n)$ où $a, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres complexes.

   b) Préciser la valeur de a.

   c) Montrer que pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$, $i \neq j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j$.