

Licence 1^{ère} année, 2024-2025, MATHÉMATIQUES ET CALCUL 1 (MC1)

Contrôle terminal, lundi 6 janvier 2025

Durée 2h ou 2h40 pour 1/3 temps.

*Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et les téléphones, même à titre d'horloge, sont également interdits.
Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.*

Exercice 1 (10pt)

Soient $P = X(X-2)(X+1+i\sqrt{3})(X+1-i\sqrt{3})$ et $Q = X(X+i\frac{1+\sqrt{65}}{\sqrt{8}})(X+i\frac{1-\sqrt{65}}{\sqrt{8}})$. Posons $T = P + Q$.

1. a) Quelles sont les racines de P et de Q ?
b) Mettre les racines de P et Q sous forme exponentielle.
2. Développer P et Q , puis en déduire que $T = X^4 + X^3 + \frac{i}{\sqrt{2}}X^2$.
3. a) Calculer T' . Donner une racine évidente de T ainsi que sa multiplicité (en justifiant).
b) Donner finalement toutes les racines de T .

Correction

10 = (1 + 2) + 1.5 + (1.5 + 4)

1. a) P et Q étant sous forme factorisée, on obtient que les racines de P sont : 0, 2, $-1 - i\sqrt{3}$, $-1 + i\sqrt{3}$ et celles de Q sont : 0, $-i\frac{1+\sqrt{65}}{\sqrt{8}}$, $-i\frac{1-\sqrt{65}}{\sqrt{8}}$ (1pt).

■ Commentaire post-correction des copies. Attention de ne pas oublier la racine : 0. On a $P = (X-0)(X-2)(X+1+i\sqrt{3})(X+1-i\sqrt{3})$.

- b) Notons z_1, z_2, z_3, z_4 les racines de P dans l'ordre donné par la précédente question et w_1, w_2, w_3 celles de Q .

Alors ces nombres complexes écrits sous forme exponentielle sont :

$$-z_1 = 0, z_2 = 2, z_3 = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{\frac{4i\pi}{3}}, z_4 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ (1pt)},$$

$$-w_1 = 0, w_2 = \frac{1+\sqrt{65}}{\sqrt{8}}(-i) = \frac{1+\sqrt{65}}{\sqrt{8}}e^{\frac{3i\pi}{2}}, w_3 = \frac{\sqrt{65}-1}{\sqrt{8}}i = \frac{\sqrt{65}-1}{\sqrt{8}}e^{\frac{i\pi}{2}} \text{ (car } \sqrt{65} > \sqrt{64} = 8 > 1) \text{ (1pt)}.$$

■ Commentaire post-correction des copies. Des difficultés pour mettre ces nombres complexes sous forme exponentielle, particulièrement w_2 et w_3 . Le lien entre la position géométrique d'un nombre complexe et son écriture sous forme exponentielle n'est pas acquis pour tout le monde. Il n'était pas nécessaire par exemple de calculer le module de w_3 . Il suffisait de remarquer que $w_3 = \alpha i$ avec $\alpha = \frac{\sqrt{65}-1}{\sqrt{8}} > 0$, donc w_3 est un nombre complexe sur l'axe des imaginaires purs avec une partie imaginaire positive. Donc $w_3 = \alpha e^{\frac{i\pi}{2}}$.

2. On a $P = X(X-2)(X-z_3)(X-z_4)$ avec z_3 et z_4 conjugués l'un de l'autre, donc

$$P = X(X-2)(X^2 - 2\Re(z_3)X + |z_3|^2) = X(X-2)(X^2 + 2X + 4) = X^4 - 8X \text{ (0.75pt)}.$$

Puis

$$Q = X\left(X^2 + \left(2i\frac{1}{\sqrt{8}}\right)X - \frac{1-65}{8}\right) = X^3 + \frac{i}{\sqrt{2}}X^2 + 8X. \text{ (0.75pt)}$$

$$\text{Ainsi } T = P + Q = X^4 + X^3 + \frac{i}{\sqrt{2}}X^2.$$

3. a) On a $T' = 4X^3 + 3X^2 + i\sqrt{2}X$ (0.5pt).

Comme T ne contient pas de terme constant, 0 est une racine de T . C'est également le cas de T' , donc 0 est au moins une racine double de T . Or $T'' = 12X^2 + 6X + i\sqrt{2}$, donc $T''(0) \neq 0$, donc 0 est racine de multiplicité 2 de T (1pt).

Autre justification : on a la factorisation $T = X^2(X^2 + X + \frac{i}{\sqrt{2}})$, donc 0 est racine double de T car 0 n'est pas racine de $X^2 + X + \frac{i}{\sqrt{2}}$ (dont le terme constant est non nul).

b) 4pt

On a $T = X^2(X^2 + X + \frac{i}{\sqrt{2}})$. Posons $S = X^2 + X + \frac{i}{\sqrt{2}}$. Le discriminant de S est $\Delta = 1 - 2\sqrt{2}i$. Il faut calculer une racine carrée complexe de $\Delta \in \mathbb{C}$. On ne sait identifier une forme exponentielle usuelle de Δ . On utilise donc la méthode dite "arithmétique". Remarquons que $|\Delta| = 3$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \Delta = (a + ib)^2 &\Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{2}i = a^2 - b^2 + 2abi, \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a^2 - b^2, \\ 3 = a^2 + b^2, \\ -2\sqrt{2} = 2ab. \end{cases} \end{aligned}$$

La deuxième ligne provenant du fait que $3 = |\Delta| = |a + ib|^2 = a^2 + b^2$. En sommant les deux premières lignes et en retranchant la première dans la seconde on obtient finalement que

$$\Delta = (a + ib)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = a^2, \\ 1 = b^2, \\ -\sqrt{2} = ab. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2}, \\ b = -1, \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -\sqrt{2}, \\ b = 1. \end{cases}$$

Ainsi une racine carrée de Δ est $\delta = \sqrt{2} - i$ et donc les racines de S sont

$$r_1 = \frac{-1 - \delta}{2} = \frac{-1 - \sqrt{2}}{2} + \frac{i}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1 + \delta}{2} = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2} - \frac{i}{2}.$$

Ainsi les racines de T sont 0 (multiplicité 2), r_1 et r_2 .

Exercice 2 (6pt)

Pour chacune des suites définies à partir des termes généraux suivants, vous fournirez le domaine de définition, un équivalent le plus simple possible et la limite (si elle existe).

1. $u_n = \cos(n)n - n^2$.

3. $w_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

2. $v_n = \ln(2n) - \sqrt{n}$.

4. $x_n = \frac{(-3)^{n-1} - 2^{2n+2}}{n + \sin(n) + 1}$.

Correction

6 = 1.25 + 1.5 + 1.25 + 2

Commentaire post-correction des copies. Énormément d'erreurs dans cet exercice concernant le domaine de définition des suites proposées. Une suite, par définition, c'est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'un sous ensemble infini de $\mathbb{N}$ comme $\mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ etc...) à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Il est donc totalement faux de dire que le terme u_n est définie pour tout $n \in \mathbb{R}$: cela ne fait aucun sens car u_n est vu que le terme d'une suite.

Beaucoup de confusions également dans l'ensemble du sujet concernant le fait d'assimiler une fonction f ou une suite u à leur évaluation en un x ou un n . Par exemple il a énormément été écrit des choses fausses comme "la suite u_n " ou "la fonction $f(x)$ ".

1. Le terme u_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ (0.25pt). On a $\cos(n) = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n)$, donc $u_n = -n^2 + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^2)$ et donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n^2$. Comme $-n^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$, on a donc $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ (1pt).

Autre justification de l'équivalent : on a $u_n = -n^2 \left(1 - \frac{\cos(n)}{n}\right)$, or $\cos(n) = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n)$, donc $\frac{u_n}{-n^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$, d'où $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n^2$.

2. Comme $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, le terme v_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (0.5pt). Par croissance comparée, on a $\ln(2n) = \ln(2) + \ln(n) = o_{n \rightarrow +\infty}(\sqrt{n})$, d'où $v_n = -\sqrt{n} + o_{n \rightarrow +\infty}(\sqrt{n})$ et donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\sqrt{n}$. Comme $-\sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$, on a donc $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ (1pt).
3. Le terme w_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (0.25pt). On a $\frac{1}{n} = o_{n \rightarrow +\infty}((-1)^n)$, donc $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^n$. Ainsi, si $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admettait une limite (finie ou infinie), alors ce serait aussi le cas de la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Or cette dernière n'admet pas de limite. Donc c'est également le cas de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (1pt).
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n + \sin(n) + 1 \geq n > 0$ et cette quantité vaut 1 en 0, donc elle ne s'annule pas sur $\mathbb{N}$. Par conséquent le terme y_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ (0.5pt).
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{2n+2} = 4^{n+1}$, or $(-3)^{n-1} = o_{n \rightarrow +\infty}(4^{n+1})$ donc $(-3)^{n-1} - 2^{2n+2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -4^{n+1}$.
Puis $\sin(n) + 1 = o_{n \rightarrow +\infty}(n)$, donc $n + \sin(n) + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$. D'où par quotient d'équivalents, on obtient que $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n}4^{n+1}$ (1pt). Par croissance comparée, on obtient que $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ (0.5pt).

Exercice 3 (9.5pt)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = x^n + x$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f_n(x) = 1$.
 - Montrer que f_n est strictement croissante sur $[0, 1]$. En déduire qu'il existe un unique $x \in [0, 1]$ tel que $f_n(x) = 1$. Désormais, on note cet élément x_n .
 - Montrer que $x_n \in]0, 1[$.
- On a donc construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$x_n \in]0, 1[\quad \text{et} \quad f_n(x_n) = 1.$$
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $x_n^{n+1} + x_n < x_n^n + x_n$ et en déduire que $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$.
 - En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
 - En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite notée $\ell \in [0, 1]$.
- On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n < \ell$. *Bonus (hors barème) : le démontrer en utilisant la définition de la convergence d'une suite.*
 - On suppose par l'absurde que $\ell < 1$. Montrer que $x_n^n + x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.
 - Conclure alors sur la valeur de ℓ . *Indication : on pensera à utiliser le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x_n) = 1$.*

Correction

$$9.5 = (1 + 1.25 + 0.5) + (1.5 + 0.75 + 1.5) + (2 + 1)$$

- La fonction f_n est continue sur $[0, 1]$ car polynomiale. De plus $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 2$, donc $f_n(0) \leq 1 \leq f_n(1)$, ainsi par continuité de f_n sur $[0, 1]$ et le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f_n(x) = 1$ (1pt).
 - La fonction f_n est dérivable sur $[0, 1]$ car polynomiale et pour tout $x \in [0, 1]$, $f'_n(x) = nx^{n-1} + 1 \geq 1 > 0$, d'où f_n est strictement croissante sur $[0, 1]$ (0.75pt). En particulier f_n est injective sur $[0, 1]$, donc l'antécédent de 1 par f_n trouvé à la question précédente est unique (0.5pt).
 - On a $x_n \neq 0$ car $f_n(0) = 0 < 1$ et $x_n \neq 1$ car $f_n(1) = 2 > 1$, d'où $x_n \in]0, 1[$ (0.5pt).
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $0 < x_n < 1$, donc en multipliant cette inégalité par $x_n^n > 0$, on obtient $x_n^{n+1} < x_n^n$ et donc finalement $x_n^{n+1} + x_n < x_n^n + x_n$ (0.75pt).
On a donc $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n < x_n^n + x_n$, or par définition $x_n^n + x_n = f_n(x_n) = 1$ et $1 = f_{n+1}(x_{n+1})$, d'où finalement $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$ (0.75pt).
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a montré que $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$. Si par l'absurde $x_n \geq x_{n+1}$, alors comme f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ on a $f_{n+1}(x_n) \geq f_{n+1}(x_{n+1})$ ce qui est une contradiction. D'où $x_n < x_{n+1}$. Et donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante (0.75pt).

c) La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et majorée (par 1) donc par le théorème de la limite monotone elle converge (0.75pt). Notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < x_n < 1$, par passage à la limite dans ces inégalités, on obtient $0 \leq \ell \leq 1$ (0.75pt).

3. (+3pt) Démonstration du bonus. Supposons par l'absurde qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_N \geq \ell$. Alors pour tout $n \geq N + 2$, comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, on a $x_n > x_{N+1} > x_N \geq \ell$. Soit $\varepsilon = \frac{x_{N+1} - \ell}{2}$. On a ainsi $\varepsilon > 0$. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ , il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon = \frac{\ell + x_{N+1}}{2} < x_{N+1}$. Soit $n \geq \max(N + 2, N')$, alors on a à la fois $x_n > x_{N+1}$ (car $n \geq N + 2$) et $x_n < x_{N+1}$ (car $n \geq N'$), ce qui est impossible. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n < \ell$.

a) On a, par hypothèse, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < x_n < \ell$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par stricte croissance de $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^n$, on a $0 < x_n^n < \ell^n$. Or comme $\ell \in [0, 1]$, $\ell^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, et par conséquent par le théorème des gendarmes on obtient que $x_n^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ (1.5pt). De plus on sait que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ , donc par sommation de suites convergentes, on obtient que $x_n^n + x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ (0.5pt).

b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 = f_n(x_n) = x_n^n + x_n$. Donc la suite $(x_n^n + x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 1 (puisque c'est une suite constante valant 1). Par unicité de la limite et d'après la précédente question, on obtient que $\ell = 1$. Or on avait supposé que $\ell < 1$. Contradiction. D'où $\ell \geq 1$. Comme on sait que $\ell \in [0, 1]$, on obtient donc $\ell = 1$ (1pt).

Exercice 4 (6.5pt)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

- Justifier la dérivabilité de f et donner l'expression de $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
- a) Soit $x > 0$. Montrer qu'il existe $c \in]x, x + 1[$ tel que $f(x) - f(x + 1) = \frac{1}{c^2} \exp\left(\frac{1}{c}\right)$.
- b) En déduire que

$$\frac{1}{(x + 1)^2} \exp\left(\frac{1}{x + 1}\right) < f(x) - f(x + 1) < \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right).$$

Indication : on pourra faire l'étude des variations de la fonction $g : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{t^2} \exp\left(\frac{1}{t}\right)$.

- c) En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(f(x) - f(x + 1))$.

Correction

$$6.5 = 1.25 + (1.5 + 2.25 + 1.5)$$

- f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par composée de fonctions dérivables sur leurs domaines de définition (0.5pt). Par la formule de la dérivée d'une composée, on a donc pour tout $x > 0$

$$f'(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right). \text{ (0.75pt)}$$

- a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $[x, x + 1] \subset \mathbb{R}_+^*$ donc est continue sur $[x, x + 1]$ est dérivable sur $]x, x + 1[$. Ainsi par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, x + 1[$ tel que

$$f(x + 1) - f(x) = f'(c)(x + 1 - x) = -\frac{1}{c^2} \exp\left(\frac{1}{c}\right),$$

d'où

$$f(x) - f(x + 1) = \frac{1}{c^2} \exp\left(\frac{1}{c}\right). \text{ (1.5pt)}$$

- b) Considérons la fonction $g : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{t^2} \exp\left(\frac{1}{t}\right)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit et composée de fonctions dérivables sur leurs domaines de définition. On a pour tout $t > 0$

$$g'(t) = -\frac{2}{t^3} \exp\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t^2} \exp\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} = -\frac{1}{t^3} \exp\left(\frac{1}{t}\right) \left(2 + \frac{1}{t}\right) < 0,$$

donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (1.25pt) et donc en particulier $g(x + 1) < g(c) < g(x)$. Or $g(c) = -f'(c) = f(x) - f(x + 1)$ d'après ce qui précède, donc on obtient bien que

$$\frac{1}{(x + 1)^2} \exp\left(\frac{1}{x + 1}\right) < f(x) - f(x + 1) < \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right). \text{ (1pt)}$$

c) D'après ce qui précède, on a montré que pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{1}{(x+1)^2} \exp\left(\frac{1}{x+1}\right) < f(x) - f(x+1) < \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right),$$

d'où en multipliant ces inégalités par $x^2 > 0$ on obtient

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} \exp\left(\frac{1}{x+1}\right) < x^2(f(x) - f(x+1)) < \exp\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or les membres de gauche et droite de ces deux inégalités tendent vers 1 lorsque $x \rightarrow +\infty$, donc par le théorème d'encadrement ou des gendarmes, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(f(x) - f(x+1)) = 1$ (1.5pt).

Exercice 5 (5.5pt)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité en 0 donné par

$$f(x) = -x + 3x^2 + x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3).$$

1. Que peut-on dire sur la continuité et la dérivabilité de f ?
2. Rappeler le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\cos$.
3. Donner le développement limité à l'ordre 3 de $f \times \cos$ en 0.
4. Donner, si c'est possible, le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\cos \circ f$. Sinon expliquer pourquoi ce n'est pas possible.
5. Donner, si c'est possible, le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f \circ \cos$. Sinon expliquer pourquoi ce n'est pas possible.

Correction

$$5.5 = 1 + 0.5 + 1 + 2 + 1$$

1. Comme f admet un DL à l'ordre 3 en 0, f admet en particulier un DL à l'ordre 1 en 0 (par troncature), d'où f est dérivable en 0 donc également continue en 0. De plus par identification, $f(0) = 0$ et $f'(0) = -1$ (1pt).

Commentaire post-correction des copies. Beaucoup de justification de la dérivabilité (et continuité) de f par le fait que f serait soi-disant polynomiale. Ce n'est pas le cas ! La fonction f s'approche au voisinage de 0 par une fonction polynomiale, c'est pour cela que l'on dit que f admet un développement limité (c'est le principe), mais cela ne dit pas que f est polynomiale. Par exemple la fonction exponentielle admet un DL1 en 0 (même à DL à tout ordre en 0), $e^x = 1 + x + o_{x \rightarrow 0}(x)$, mais la fonction exponentielle n'est bien évidemment pas un polynôme.

Nous avons vu en classe dans le chapitre sur la dérivabilité que le fait qu'une fonction admette un DL1 en un point a implique que la fonction est nécessairement dérivable en a (et donc également continue en a).

2. On a $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$ (0.5pt).

3. On a

$$\begin{aligned} f(x) \cos(x) &= \left(-x + 3x^2 + x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right) = -x + 3x^2 + \frac{x^3}{2} + x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3), \\ &= -x + 3x^2 + \frac{3x^3}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3). \end{aligned} \quad (1pt)$$

4. On a $f(0) = 0$, donc on peut utiliser le développement limité de $\cos$ en 0 et la composée de développement limité, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \cos(f(x)) &= 1 - \frac{1}{2} \left[-x + 3x^2 + x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right]^2 + o_{x \rightarrow 0} \left(\left[-x + 3x^2 + x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right]^3\right), \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left[x^2 - 2 \cdot 3x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right] + o_{x \rightarrow 0}(x^3), \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + 3x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3). \end{aligned} \quad (2pt)$$

5. On a $\cos(0) = 1$, donc pour écrire un développement limité de $f \circ \cos$ en 0, il faudrait avoir un développement limité de f en 1. Or on ne sait pas si f en admet un à cette localisation. Donc on ne peut rien dire en l'état (1pt).