Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence $1^{\text{ère}}$ année, 2024-2025, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

# Contrôle terminal, lundi 6 janvier 2025

*Durée 2h ou 2h40 pour 1/3 temps.*
*Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et les téléphones, même à titre d'horloge, sont également interdits.*
*Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.*

## Exercice 1 (10pt)

Soient $P = X(X-2)(X+1+i\sqrt{3})(X+1-i\sqrt{3})$ et $Q = X(X+i\frac{1+\sqrt{65}}{\sqrt{8}})(X+i\frac{1-\sqrt{65}}{\sqrt{8}})$. Posons $T = P+Q$.

1. a) Quelles sont les racines de $P$ et de $Q$ ?
   b) Mettre les racines de $P$ et $Q$ sous forme exponentielle.
2. Développer $P$ et $Q$, puis en déduire que $T = X^4 + X^3 + \frac{i}{\sqrt{2}}X^2$.
3. a) Calculer $T'$. Donner une racine évidente de $T$ ainsi que sa multiplicité (en justifiant).
   b) Donner finalement toutes les racines de $T$.

## Exercice 2 (6pt)

Pour chacune des suites définies à partir des termes généraux suivants, vous fournirez le domaine de définition, un équivalent le plus simple possible et la limite (si elle existe).

1. $u_n = \cos(n)n - n^2$.
2. $v_n = \ln(2n) - \sqrt{n}$.
3. $w_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.
4. $x_n = \frac{(-3)^{n-1} - 2^{2n+2}}{n+\sin(n)+1}$.

## Exercice 3 (9.5pt)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) = x^n + x$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f_n(x) = 1$.
   b) Montrer que $f_n$ est strictement croissante sur $[0,1]$. En déduire qu'il existe un unique $x \in [0,1]$ tel que $f_n(x) = 1$. *Désormais, on note cet élément $x_n$.*
   c) Montrer que $x_n \in ]0,1[$.
2. On a donc construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$x_n \in ]0,1[ \quad \text{et} \quad f_n(x_n) = 1.$$

   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $x_n^{n+1} + x_n < x_n^n + x_n$ et en déduire que $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$.
   b) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
   c) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite notée $\ell \in [0,1]$.
3. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n < \ell$. *Bonus (hors barème) : le démontrer en utilisant la définition de la convergence d'une suite.*
   a) On suppose par l'absurde que $\ell < 1$. Montrer que $x_n^n + x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
   b) Conclure alors sur la valeur de $\ell$. *Indication : on pensera à utiliser le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x_n) = 1$.*

**Exercice 4** (6.5pt)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Justifier la dérivabilité de $f$ et donner l'expression de $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

2. a) Soit $x > 0$. Montrer qu'il existe $c \in ]x, x+1[$ tel que $f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c^2}\exp\left(\frac{1}{c}\right)$.

   b) En déduire que

$$\frac{1}{(x+1)^2}\exp\left(\frac{1}{x+1}\right) < f(x) - f(x+1) < \frac{1}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\right).$$

   *Indication : on pourra faire l'étude des variations de la fonction* $g : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{t^2}\exp\left(\frac{1}{t}\right)$.

   c) En déduire la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2(f(x) - f(x+1))$.

**Exercice 5** (5.5pt)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité en 0 donné par

$$f(x) = -x + 3x^2 + x^3 + \underset{x \to 0}{o}(x^3).$$

1. Que peut-on dire sur la continuité et la dérivabilité de $f$ ?
2. Rappeler le développement limité à l'ordre 3 en 0 de cos.
3. Donner le développement limité à l'ordre 3 de en 0 de $f \times \cos$.
4. Donner, si c'est possible, le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\cos \circ f$. Sinon expliquer pourquoi ce n'est pas possible.
5. Donner, si c'est possible, le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f \circ \cos$. Sinon expliquer pourquoi ce n'est pas possible.