Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 1ère année, 2024-2025, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Contrôle continu, jeudi 14 novembre 2024

Durée 1h30 ou 2h pour 1/3 temps.
Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et les téléphones, même à titre d'horloge, sont également interdits.
Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Total sujet : 32 = 5 + 6 + 2 + 8 + 11

Exercice 1 (5pt)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 1).$$

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs la négation de la phrase : « La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ».
2. a) Calculer les trois premiers termes de la suite.
   b) Définir la fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
   c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle géométrique ? Arithmétique ?
3. a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   c) Soit $\lambda \geqslant 0$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \lambda u_n$, est majorée.

Correction.
5 = 0.75 + (0.5 + 0.5 + 0.5) + (1.5 + 0.75 + 0.5)

1. La négation de la convergence de u vers ℓ est : $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, |u_n - \ell| \geqslant \varepsilon$ (0.75pt).
2. a) On a $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{3}{4}$ (et $u_3 = \frac{7}{8}$) (0.5pt).
   b) La fonction f recherchée est
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{2} + \frac{1}{2}. \end{array} (0.5pt)$$
   c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni géométrique car on n'a pas : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = ru_n$ pour un $r \in \mathbb{R}$; ni arithmétique car on n'a pas : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + a$ pour un $a \in \mathbb{R}$ (0.5pt).
3. a) Initialisation. On a $u_0 = 0$, donc $u_0 \in [0, 1]$.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n. Comme $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2}$, donc par hypothèse de récurrence $u_{n+1} \geqslant \frac{0+1}{2} \geqslant 0$ et $u_{n+1} \leqslant \frac{1+1}{2} = 1$, soit $u_{n+1} \in [0, 1]$.
   Ceci termine la récurrence.
   1.5pt dont 0.5pt à une bonne structuration / rédaction du raisonnement.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1-u_n}{2}$. Or $u_n \leqslant 1$, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. La suite u est bien croissante (0.75pt)
   c) Soit $\lambda \geqslant 0$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$, donc comme $\lambda \geqslant 0$, $v_n = \lambda u_n \leqslant \lambda$. La suite v est bien majorée (0.5pt).

Exercice 2 (6pt)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & az + b. \end{array}$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $a \neq 0$.
2. Montrer que, de même, f est surjective si et seulement si $a \neq 0$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $f\left(e^{i\theta}\right) - f\left(e^{-i\theta}\right)$ et mettre cette quantité sous forme algébrique.
4. On rappelle que $\mathbb{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1 et $i\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres imaginaires purs. Déduire de la question précédente que l'image de l'application $g : z \in \mathbb{U} \mapsto f(z) - f(\bar{z})$ est incluse dans $i\mathbb{R}$
5. L'application g est-elle injective ?

Correction.
$6 = 1.75 + 1.75 + 0.75 + 0.75 + 1$

1. On a f injective si et seulement si pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $f(z) = f(z') \Rightarrow z = z'$.
   Montrons l'équivalence de l'énoncé en raisonnant par double implication.
   ($\Leftarrow$) Supposons $a \neq 0$. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = f(z')$ *i.e.* $a(z - z') = 0$. Comme $a \neq 0$, on a $z = z'$. La fonction f est bien injective.
   ($\Rightarrow$) Supposons que f est injective. Si par l'absurde $a = 0$ alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = b$. En particulier $f(0) = f(1)$ bien que $0 \neq 1$. Ainsi f n'est pas injective. C'est absurde. Donc $a \neq 0$.
   (1.75pt)
2. On a f surjective si et seulement si pour tout $w \in \mathbb{C}$ il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = w$.
   Montrons l'équivalence de l'énoncé en raisonnant par double implication.
   ($\Leftarrow$) Supposons $a \neq 0$. Soit $w \in \mathbb{C}$. Alors comme $a \neq 0$, la quantité $z = \frac{w-b}{a}$ est bien définie et alors $f(z) = w$. La fonction f est bien surjective.
   ($\Rightarrow$) Supposons que f est surjective. Si par l'absurde $a = 0$ alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = b$. Ainsi $b + 1$ n'admet pas d'antécédent par f, donc f n'est pas surjective. C'est absurde. Donc $a \neq 0$.
   (1.75pt)
3. On a
$$f\left(e^{i\theta}\right) - f\left(e^{-i\theta}\right) = a\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = 2ia\sin(\theta). \ (0.75pt)$$
4. Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Ainsi, par la question précédente,
$$g(z) = f(e^{i\theta}) - f(e^{-i\theta}) = 2ia\sin(\theta) \in i\mathbb{R}$$
   On a bien que pour tout $z \in \mathbb{U}$, $g(z) \in i\mathbb{R}$, c'est-à-dire $g(\mathbb{U}) \subset i\mathbb{R}$ (0.75pt).
5. On a $1, -1 \in \mathbb{U}$ avec $g(1) = f(1) - f(1) = 0$ et $g(-1) = f(-1) - f(-1) = 0$, donc $g(1) = g(-1)$ (alors que $-1 \neq 1$) et donc l'application g n'est pas injective (1pt).

Exercice 3 (2pt)

On considère le nombre complexe $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$.
1. Donner la partie réelle, la partie imaginaire, le module z_0.
2. Écrire z_0 sous forme exponentielle. En déduire l'argument principal de z_0.
3. Calculer z_0^3.

Correction.
$2 = 0.75 + 0.75 + 0.5$

1. On a $\mathrm{Re}(z_0) = 1$, $\mathrm{Im}(z_0) = -\sqrt{3}$, $|z_0| = 2$ (0.75pt).
2. On a $z_0 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\pi/3} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$. Donc l'argument principal de z est $\arg(z) = \frac{5\pi}{3}$ (0.75pt).
   Rappel : l'argument principal d'un $z \in \mathbb{C}$ a été défini dans le cours comme l'unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = |z|e^{i\theta}$.
3. On a donc $z_0^3 = 2^3 e^{-i3\cdot\frac{\pi}{3}} = 8e^{-i\pi} = -8$ (0.5pt).

Exercice 4 (8pt)

Soit le polynôme
$$P = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0,$$
où $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$.
On note $a, b, c \in \mathbb{C}$ les racines de P et on suppose qu'elles satisfont les relations
$$\begin{cases} a + b + c = i - 1, \\ ab + bc + ca = i, \\ abc = -2. \end{cases}$$
1. Justifier pourquoi P admet 3 racines complexes.
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}$ à l'aide des notations introduites dans l'énoncé.
3. En déduire la valeur des coefficients a_0, a_1, a_2.
4. Déterminer $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré 2 tel que $P = (X - i)Q$.
5. On peut si besoin admettre dans cette question que $Q = X^2 + X + 2i$. En déduire les racines a, b, c du polynôme P.

Correction.

8 = 0.5 + 0.5 + 1.5 + 1.5 + 4

1. Comme P est de degré 3, par le théorème de d'Alembert, P admet 3 racines complexes (comptées éventuellement avec multiplicité) (0.5pt).

   On veut voir cité le nom du théorème.

2. Comme a, b, c sont les racines du polynôme P et que le coefficient dominant de P est 1, on a $P = (X-a)(X-b)(X-c)$ (0.5pt).

3. En développant l'expression de P dans la question précédente, on obtient : $P = X^3-(a+b+c)X^2+(ab+bc+ca)X-abc$. Soit en remplaçant d'après les équations fournies par l'énoncé : $P = X^3-(i-1)X^2+iX+2$. Par identification, on a donc $a_2 = -(i-1) = 1-i$, $a_1 = i$, $a_0 = 2$ (1.5pt).

4. On peut effectuer la division euclidienne de P par $X-i$. Le dividende est alors X^2+X+2i et le reste 0, donc $P = (X-i)(X^2+X+2i)$ (1.5pt).

   Alternativement, considérons un polynôme $Q = b_2X^2+b_1X+b_0 \in \mathbb{C}[X]$. On a

$$\begin{aligned} P = (X-i)Q \quad &\Leftrightarrow \quad X^3-(i-1)X^2+iX+2 = (X-i)(b_2X^2+b_1X+b_0), \\ &\Leftrightarrow \quad X^3-(i-1)X^2+iX+2 = b_2X^3+(-ib_2+b_1)X^2+(-ib_1+b_0)X-ib_0, \end{aligned}$$

   cette dernière équation était équivalente, par identification, à $b_2 = 1$, $-(i-1) = -ib_2+b_1$, $i = -ib_1+b_0$ et $2 = -ib_0$, soit $b_2 = 1$, $b_1 = 1$, $b_0 = 2i$.

5. Le nombre complexe i est une racine de P. Les deux autres sont les racines de Q (0.5pt).

   3.5pt pour l'ensemble du raisonnement qui suit.

   Cherchons donc les racines du polynôme Q. Son discriminant vaut $\Delta = 1-8i$. Cherchons $\delta = \alpha+i\beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tel que $\delta^2 = \Delta$. On a

$$\delta^2 = \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha^2-\beta^2 = 1, \\ 2\alpha\beta = -8, \\ \alpha^2+\beta^2 = |1-8i| = \sqrt{65}, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha^2 = \frac{\sqrt{65}+1}{2}, \\ \beta^2 = \frac{\sqrt{65}-1}{2}, \\ \alpha\beta = -4, \end{cases}$$

   Comme $\alpha\beta < 0$, α et β sont de signe opposé. Par conséquent, le système précédent est équivalent à avoir

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{65}+1}{2}} \text{ et } \beta = -\sqrt{\frac{\sqrt{65}-1}{2}},$$
$$\text{ou : } \alpha = -\sqrt{\frac{\sqrt{65}+1}{2}} \text{ et } \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{65}-1}{2}}.$$

   Donc par exemple $\delta = \sqrt{\frac{\sqrt{65}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{65}-1}{2}}$ satisfait donc $\delta^2 = \Delta$.

   Les racines de Q sont par conséquent $\frac{-1\pm\delta}{2}$ et les racines de P :

$$i, \frac{-1-\delta}{2}, \frac{-1+\delta}{2}.$$

Exercice 5 (11pt)

On considère l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z+|z|}{2}$. Les deux parties suivantes sont indépendantes.

Partie I.

1. Posons $z = i$. Représenter dans le plan complexe, les nombres z, $|z|$ et $f(z)$. Comment se construit géométriquement $f(z)$ à partir de z et $|z|$? Généraliser au cas $z \in \mathbb{C}$ quelconque.
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$.
3. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(f(z)) \geqslant 0$. La fonction f est-elle surjective ?

Partie II. On considère la suite à valeurs complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = i$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n + |u_n|}{2}.$$

On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = \mathrm{Re}(u_n)$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $b_n = \mathrm{Im}(u_n)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n + ib_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leqslant |u_0|$. Qu'en déduire pour la suite u ?

5. Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

6. Montrer, uniquement à l'aide de la définition de la convergence, que la suite $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

7. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

8. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Correction.

11 = 1 + 0.75 + 1.5 + 2 + 1 + 3 + 1 + 0.75

1. On a $|z| = 1$, $f(z) = \frac{1+i}{2}$. Dans le plan complexe, $f(z)$ est donc le milieu du segment reliant $z = i$ à $|z| = 1$. Plus généralement pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z)$ est le milieu du segment reliant dans le plan complexe z à $|z|$.

0.5pt dessin, 0.5pt interprétation

2. Soit $z = a \in \mathbb{R}$. Alors $|z| = |a|$ (la valeur absolue de a), donc $f(z) = \frac{a+|a|}{2}$. Cette quantité est toujours positive puisque $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$, donc $a + |a| \geqslant 0$. On a bien montré que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$ (0.75pt).

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $\mathrm{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}(\mathrm{Re}(z) + |z|)$. Or $|\mathrm{Re}(f(z))| \leqslant |z|$ et $-\mathrm{Re}(f(z)) \leqslant |\mathrm{Re}(f(z))|$, donc $\mathrm{Re}(z) + |z| \geqslant 0$. Par conséquent on a bien $\mathrm{Re}(f(z)) \geqslant 0$ (1pt).

La fonction f n'est pas surjective car les nombres complexes de partie réelle strictement négative n'appartiennent pas à l'image de f (0.5pt).

4. Prouvons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant |u_0|$.

Initialisation. On a bien $|u_0| \leqslant |u_0|$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n. On a $u_{n+1} = \frac{u_n+|u_n|}{2}$, donc par inégalité triangulaire $|u_{n+1}| \leqslant \frac{|u_n|+|u_n|}{2} = |u_n|$. Or par hypothèse de récurrence, $|u_n| \leqslant |u_0|$, donc $|u_{n+1}| \leqslant |u_0|$.

Ceci termine la récurrence (1.5pt).

Le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant |u_0|$ traduit le fait que la suite u est bornée (0.5pt).

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} = \frac{u_n+|u_n|}{2}$ et par définition $u_{n+1} = a_{n+1}+ib_{n+1}$, $u_n = a_n+ib_n$ avec $a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1} \in \mathbb{R}$, donc

$$a_{n+1} + ib_{n+1} = \frac{a_n + ib_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} + i\frac{b_n}{2}. \tag{1}$$

En identifiant les parties imaginaires, on obtient $b_{n+1} = \frac{b_n}{2}$. On a prouvé que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$, d'où $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ (1pt).

Comme $u_0 = i$, on a $b_0 = 1$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{1}{2^n}$.

6. Soit $\varepsilon > 0$.

Si $\varepsilon \geqslant 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < \frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon$ (0.5pt).

Sinon supposons $\varepsilon < 1$. Posons $N = E\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}\right) + 1$. Par définition de la partie entière, on a $N > \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}$, or $\frac{1}{\varepsilon} > 1$, donc $\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) > 0$, d'où $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \geqslant N$, alors $n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}$, donc $n\ln(2) \geqslant \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, et donc en passant à l'exponentielle (qui est croissante) et à l'inverse, on obtient $\frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon$ (2pt).

On a bien prouvé dans tous les cas que l'assertion

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon,$$

est satisfaite. D'où la suite converge vers 0 (0.5pt).

7. D'après l'équation (1), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{a_n+\sqrt{a_n^2+b_n^2}}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a donc $a_{n+1} - a_n = \frac{-a_n+\sqrt{a_n^2+b_n^2}}{2}$. Or $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geqslant \sqrt{a_n^2} = |a_n|$, donc $a_{n+1} - a_n \geqslant \frac{-a_n+|a_n|}{2}$. Or $a_n \leqslant |a_n|$, donc $-a_n + |a_n| \geqslant 0$, d'où $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$. La suite a est bien croissante (1pt).

8. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \mathrm{Re}(u_n)$. Or pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$, donc $|a_n| = |\mathrm{Re}(u_n)| \leqslant |u_n| \leqslant |u_0|$. La suite a est bien bornée (0.75pt).