Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence $1^{\text{ère}}$ année, 2025-2026, MATHÉMATIQUES ET CALCUL 1 (MC1)

Contrôle continu, jeudi 13 novembre 2025

Durée 1h30 ou 2h pour 1/3 temps.
Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et les téléphones, même à titre d'horloge, sont également interdits.
Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 1).$$

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs la négation de la phrase : « La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ».

2. a) Calculer les trois premiers termes de la suite.
   b) Définir la fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
   c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle géométrique ? Arithmétique ?

3. a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   c) Soit $\lambda \geqslant 0$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \lambda u_n$, est majorée.

Exercice 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & az + b. \end{array}$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $a \neq 0$.

2. Montrer que, de même, f est surjective si et seulement si $a \neq 0$.

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $f\left(e^{i\theta}\right) - f\left(e^{-i\theta}\right)$ et mettre cette quantité sous forme algébrique.

4. On rappelle que $\mathbb{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1 et $i\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres imaginaires purs. Déduire de la question précédente que l'image de l'application $g : z \in \mathbb{U} \mapsto f(z) - f(\bar{z})$ est incluse dans $i\mathbb{R}$

5. L'application g est-elle injective ?

Exercice 3

On considère le nombre complexe $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$.

1. Donner la partie réelle, la partie imaginaire, le module z_0.

2. Écrire z_0 sous forme exponentielle. En déduire l'argument principal de z_0.

3. Calculer z_0^3.

Exercice 4

Soit le polynôme

$$P = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0,$$

où $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$.

On note $a, b, c \in \mathbb{C}$ les racines de P et on suppose qu'elles satisfont les relations

$$\begin{cases} a+b+c = i-1, \\ ab+bc+ca = i, \\ abc = -2. \end{cases}$$

1. Justifier pourquoi P admet 3 racines complexes.
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}$ à l'aide des notations introduites dans l'énoncé.
3. En déduire la valeur des coefficients a_0, a_1, a_2.
4. Déterminer $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré 2 tel que $P = (X-i)Q$.
5. On peut si besoin admettre <u>dans cette question</u> que $Q = X^2 + X + 2i$. En déduire les racines a, b, c du polynôme P.

Exercice 5

On considère l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z+|z|}{2}$. Les deux parties suivantes sont indépendantes.

Partie I.

1. Posons $z = i$. Représenter dans le plan complexe, les nombres z, $|z|$ et $f(z)$. Comment se construit géométriquement $f(z)$ à partir de z et $|z|$? Généraliser au cas $z \in \mathbb{C}$ quelconque.
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$.
3. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(f(z)) \geqslant 0$. La fonction f est-elle surjective ?

Partie II. On considère la suite à valeurs complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = i$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n + |u_n|}{2}.$$

On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = \mathrm{Re}(u_n)$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $b_n = \mathrm{Im}(u_n)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n + ib_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leqslant |u_0|$. Qu'en déduire pour la suite u ?
5. Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
6. Montrer, <u>uniquement à l'aide de la définition de la convergence</u>, que la suite $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
7. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
8. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.