Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 1ère année, 2024-2025, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Contrôle continu, jeudi 14 novembre 2024

Durée 1h30 ou 2h pour 1/3 temps.
Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et les téléphones, même à titre d'horloge, sont également interdits.
Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Total sujet : 31 = 9 + 5.5 + 5.5 + 3 + 8

Exercice 1 (9pt)

L'objectif de cet exercice est de factoriser le polynôme $P = X^6 + (2+i)X^4 + (1+2i)X^2 + i$ dans $\mathbb{C}$.

1. On pose $T = X^4 + 2X^2 + 1$.
   a) Donner, en justifiant, le nombre de racines complexes de T, comptées avec multiplicité.
   b) Démontrer que si $z \in \mathbb{C}$ est racine de T alors $\bar{z}$ est aussi racine de T.
   On admettra dans la suite que z et $\bar{z}$ ont alors la même multiplicité.
   c) Calculer $T(i)$, $T'(i)$ et $T''(i)$.
   d) Déduire des questions précédentes toutes les racines de T ainsi que leur multiplicité.
2. Déterminer un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré 2 tel que $P = TQ$.
3. a) Calculer les racines carrées complexes de $-i$.
   b) En déduire les racines complexes du polynôme Q.
4. Déduire des questions précédentes une factorisation de P dans $\mathbb{C}$.

Correction.
9 = (0.5 + 1.5 + 1 + 1) + 2 + (1.5 + 0.5 + 1)

1. a) Comme T est de degré 4, alors T a 4 racines (complexes) comptées avec multiplicité (0.5pt).
   b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que z est racine de T, i.e. $T(z) = 0$. On a donc $\overline{T(z)} = 0$, or le conjugué d'une somme est la somme des conjugués, et le conjugué d'un produit est le produit des conjugués, d'où $\overline{T(z)} = \bar{z}^4 + 2\bar{z}^2 + 1 = T(\bar{z})$. Par conséquent, on a bien que $T(\bar{z}) = 0$, i.e. $\bar{z}$ est racine de T (1.5pt).
   Notez que l'étape clé dans cette démonstration est l'établissement de la relation $\overline{T(z)} = T(\bar{z})$ qui a pu être obtenue ici car les coefficients de T sont réels. Ainsi le résultat démontré dans cette question se généralise à tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$: pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, si z est racine de P alors $\bar{z}$ l'est également. A rédiger en exercice !
   La propriété admise dans l'énoncé (concernant le fait que z et $\bar{z}$ sont racines avec même multiplicité) se démontre également de manière générale pour tout polynôme à coefficients réels. Pour cela il faut utiliser la caractérisation de la multiplicité grâce à l'étude des polynômes dérivés $P^{(k)}$. A faire en exercice également !
   c) On a $T' = 4X^3 + 4X$ et $T'' = 12X^2 + 4$, d'où $T(i) = i^4 + 2i^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$, puis on obtient de même $T'(i) = 0$, par contre $T''(i) = 12i^2 + 4 = -8 \neq 0$ (1pt).
   d) D'après la question 1.c), i est racine de multiplicité 2 de T. De plus, grâce à la question 1.b), on déduit que $\bar{i} = -i$ est racine de multiplicité 2 de T. D'après la question 1.a), on a ainsi bien trouvé toutes les racines (1pt).
2. Première méthode : par identification. Soit $Q = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2, avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. On a

$$P = TQ \Leftrightarrow X^6 + (2+i)X^4 + (1+2i)X^2 + i = aX^6 + bX^5 + (2a+c)X^4 + 2bX^3 + (2c+a)X^2 + bX + c,$$

$$\underset{\text{par identification}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1 = a, \\ 0 = b, \\ 2+i = 2a+c, \\ 0 = 2b, \\ 1+2i = 2c+a, \\ 0 = b, \\ 1 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 0, \\ c = i \end{cases}$$

Ainsi on trouve $Q = X^2 + i$ (2pt).

Deuxième méthode : par division euclidienne. On applique l'algorithme de la division euclidenne. On a d'abord $P = X^2T + (iX^4 + 2iX^2 + i)$, puis $iX^4 + 2iX^2 + i = iT$, donc finalement $P = X^2T + iT = (X^2 + i)T$ (le reste de la division euclidienne de P par T est le polynôme nul). On trouve bien de nouveau que $Q = X^2 + i$.

3. a) Le nombre complexe $-i$ admet deux racines complexes, opposées l'une de l'autre. Il suffit donc d'en trouver une. On a $-i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$, donc une racine de $-i$ est $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. L'autre racine est donc $z_2 = -z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.5pt pour l'ensemble. Compter tous les points si la copie s'arrête à une expression exponentielle.

b) Par définition de z_1 et z_2, on a $z_1^2 = z_2^2 = -i$, donc $Q(z_1) = 0$ et $Q(z_2) = 0$. Comme $z_1 \neq z_2$ et Q est de degré 2, on déduit que les racines du polynôme Q sont z_1 et z_2 (0.5pt).

4. On a montré que $P = TQ$, avec $T = (X - i)^2(X + i)^2$ car T est unitaire (coefficient dominant valant 1) et $i, -i$ sont les racines de multiplicité 2 de T, et $Q = (X - z_1)(X - z_2)$ car Q est unitaire et z_1 et z_2 sont les racines (de multiplicité 1) de Q, d'où

$$P = (X - i)^2(X + i)^2(X - z_1)(X - z_2). \text{ (1pt)}$$

Exercice 2 (5.5pt)

On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence telles que $u_0 = 1$ et $v_0 = 12$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n).$$

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = v_n - u_n$, est géométrique en précisant la raison. En déduire la limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elles convergent vers la même limite, que l'on notera $\ell \in \mathbb{R}$.

3. On définit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 99$. En déduire la valeur de ℓ.

Correction.

5.5 = 1 + 2 + 2.5

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) - \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) = -\frac{1}{12}u_n + \frac{1}{12}v_n = \frac{1}{12}w_n$. Ainsi w est bien géométrique de raison $\frac{1}{12}$. Comme la raison de w est dans $]-1, 1[$, w converge vers 0 (1pt).

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}w_n$ et $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{4}w_n$. Or d'après la précédente question, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \left(\frac{1}{12}\right)^n w_0$ et $w_0 = v_0 - u_0 = 11 > 0$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n > 0$. Par conséquent u est strictement croissante et v est strictement décroissante.

On a montré que u est croissante, v et décroissante et $v - u$ converge vers 0, ainsi u et v sont des suites adjacentes et convergent donc vers la même limite que l'on note $\ell \in \mathbb{R}$.

1.5pt pour l'étude de la monotonie.
0.5pt pour la conclusion, le mot "suite adjacente" doit apparaître.

3. On montre la propriété "$t_n = 99$" par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation ($n = 0$). On a $t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 99$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $t_n = 99$. Alors $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = (u_n + 2v_n) + 2(u_n + 3v_n) = 3u_n + 8v_n = t_n$. Or par hypothèse de récurrence, $t_n = 99$, donc $t_{n+1} = 99$.

Ceci termine la récurrence, et on a donc bien montré la propriété souhaitée.

Comme u et v convergent vers la même limite ℓ, par opération sur les suites convergentes, on obtient que $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3\ell + 8\ell = 11\ell$. Or on a vu que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante valant 99, donc converge vers 99. Par unicité de la limite, on obtient finalement $11\ell = 99$, soit $\ell = 9$.

1.5pt pour la récurrence.
1pt pour la fin du raisonnement.

Exercice 3 (5.5pt)

Parmi les énoncés suivants, prouver ceux qui sont vrais et donner un contre-exemple pour les autres.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée.

2. Toute suite croissante tend vers $+\infty$.

3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites stationnaires, alors la suite produit $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. *Indication : on rappelle qu'une suite stationnaire est une suite constante à partir d'un certain rang.*
4. Si une suite tend vers $-\infty$, alors elle est décroissante.

Correction.
5.5 = 1.5 + 1 + 1.5 + 1.5

1. Vrai. En effet, comme u est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$. De même, comme v est bornée, il existe $M' \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant M'$ (0.75pt).

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a alors par l'inégalité triangulaire $|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n|$, et donc $|u_n + v_n| \leqslant M + M'$. Ainsi la suite $u + v$ est bien bornée (0.75pt).
2. Faux. Contre-exemple : la suite $\left(\frac{-1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante mais converge vers 0, donc ne tend pas vers $+\infty$ (1pt).
3. Vrai. Comme u est stationnaire, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n = u_N$. De même, comme v est stationnaire, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N'$, $v_n = v_N$. Donc pour tout $n \geqslant n_0 = \max(N, N')$, on a $u_nv_n = u_{n_0}v_{n_0}$. Donc la suite uv est constante à partir du rang n_0 et vaut $u_{n_0}v_{n_0}$, i.e. uv est stationnaire (1.5pt).
4. Faux. Contre exemple : considérons la suite $u = (-|n-1|)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n = -n+1$, donc la suite u tend vers $-\infty$. Or $u_0 = -1$ et $u_1 = 0$, i.e. $u_0 < u_1$, donc la suite u n'est pas décroissante puisque ne satisfait pas pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$ (1.5pt).

   Autre contre-exemple : considérons la suite $u = (-n + (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant -n+1$, donc par passage à la limite dans l'inégalité, comme $-n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, u tend vers $-\infty$. Soit $k \in \mathbb{N}$, alors $u_{2k} = -2k+1$ et $u_{2k+1} = -2k-2$, donc $u_{2k+2} - u_{2k+1} = u_{2(k+1)} - u_{2k+1} = -2(k+1) + 1 - (-2k-2) = -1 + 2 = 1 > 0$. Donc u n'est pas décroissante car sinon on aurait $u_{2k+2} - u_{2k+1} \leqslant 0$.

Exercice 4 (3pt)

Donner les limites des suites dont les termes généraux sont énumérés ci-dessous. On pensera à préciser au préalable leur domaine de définition.

1. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$.
2. $v_n = -\frac{\sqrt{n}}{2} + \sin(\ln(n))$.

Correction.
3 = 1.5 + 1.5

1. La quantité $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (0.25pt). Soit $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}},$$
par la formule d'une somme géométrique de raison différente de 1 (0.5pt). Or $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par opération sur les suites convergentes (soustraction, division), on obtient que la suite u converge vers 2 (0.75pt).
2. La quantité v_n est définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ car ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (les autres quantités ne posent pas de soucis) (0.25pt). On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant \sin(\ln(n)) \leqslant 1$, d'où $v_n \leqslant -\frac{\sqrt{n}}{2} + 1$ (0.5pt). Or $-\frac{\sqrt{n}}{2} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, donc par passage à la limite dans une inégalité, on déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $-\infty$ (0.75pt).

Exercice 5 (8pt)

1. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, tel que $z \neq i$. On définit de plus $z' \in \mathbb{C}$ tel que
$$z' = \frac{z-1}{z-i}.$$
   a) Que pouvez-vous dire de x et y sachant que $z \neq i$? Pourquoi l'hypothèse $z \neq i$ est-elle nécessaire ?
   b) Écrire z' sous forme algébrique. Vous exprimerez la partie réelle et imaginaire de z' en fonction de x et y.
   c) En déduire que z' est réel si et seulement si $x + y = 1$.

2. On considère l'ensemble de nombres complexes suivant
$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \ / \ z \neq i, \ \frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Montrer que 1 et $-1+2i$ appartiennent à D.

b) A l'aide de la question 1.c), montrer que l'ensemble D se réécrit
$$D = \{x + i(1-x) \ / \ x \in \mathbb{R}^*\}.$$

c) En déduire une interprétation géométrique de l'ensemble des points d'affixe $z \in D$.

d) Montrer que $z_0 = \frac{1}{1-\sqrt{3}} - i\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ appartient à D. Puis mettre z_0 sous forme exponentielle.

Correction.

8 = (0.5 + 3 + 0.5) + (0.5 + 1 + 1 + 1.5)

1. a) La condition $z \neq i$ est vraie si et seulement si $x \neq 0$ ou $y \neq 1$. L'hypothèse $z \neq i$ est nécessaire afin que z' soit bien défini, car sinon on divise par 0 (0.5pt).

b) En multipliant z' au numérateur et dénominateur par le conjugué de $z-i$, on obtient
$$z' = \frac{z-1}{z-i} = \frac{(z-1)(\bar{z}+i)}{(z-i)(\bar{z}+i)} = \frac{|z|^2 + iz - \bar{z} - i}{|z|^2 - i\bar{z} + iz + 1},$$
or $iz - i\bar{z} = iz + \overline{iz} = 2\,\mathfrak{Re}(iz) = -2y$ et $iz - \bar{z} = -x - y + i(x+y)$, d'où
$$z' = \frac{x^2+y^2-x-y+i(x+y)-i}{x^2+y^2-2y+1} = \frac{x^2+y^2-x-y}{x^2+y^2-2y+1} + i\frac{x+y-1}{x^2+y^2-2y+1}.$$
Et on a
$$\mathfrak{Re}(z') = \frac{x^2+y^2-x-y}{x^2+y^2-2y+1} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(z') = \frac{x+y-1}{x^2+y^2-2y+1}.$$

3pt pour l'ensemble des calculs dont

—0.5pt pour penser à utiliser la technique "multiplication par quantité conjuguée",

—0.5pt pour une identification cohérente d'une partie réelle et imaginaire (même si erreurs de calcul).

c) Ainsi z' est réel si et seulement si $\mathfrak{Im}(z') = 0$ i.e. $x + y = 1$ (0.5pt).

2. a) Directement par le calcul. On a $1 \neq i$ et $\frac{1-1}{1-i} = 0 \in \mathbb{R}$, d'où $1 \in D$. De même $-1+2i \neq i$ et $\frac{-1+2i-1}{-1+2i-i} = 2 \in \mathbb{R}$, d'où $-1+2i \in D$ (0.5pt).

En utilisant ce qui précède. Par définition de D, on a $z = x+iy \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, appartient à D si et seulement si $\frac{z-1}{z-i}$ est réel. Or d'après la question 1.c), c'est vrai si et seulement si $x+y=1$. On a bien que 1 et $-1+2i$ satisfont cette condition, donc appartiennent bien à D.

b) Soit $z = x+iy \neq i$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. On a
$$z \in D \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R} \quad \underset{\text{par } 1.c)}{\Leftrightarrow} \quad x+y=1 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1-x \quad \Leftrightarrow \quad z = x + i(1-x).$$
De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $z = x + i(1-x) \neq i$ si et seulement si $x \neq 0$. On a donc bien
$$D = \{x + i(1-x) \ / \ x \in \mathbb{R}^*\}.$$

1pt pour ce jeu de réécriture à partir de ce qui précède

c) L'ensemble des points d'affixe appartenant à D est donc une droite d'équation $y = 1-x$, à laquelle on enlève le point d'affixe i (1pt).

d) Le nombre complexe z_0 se réécrit $z_0 = x + i(1-x)$ avec $x = \frac{1}{1-\sqrt{3}} \neq 0$. Donc $z_0 \in D$ (0.5pt).

On a de plus
$$z_0 = \frac{2}{\sqrt{3}-1}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}-1}e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$
Ainsi comme $\frac{2}{\sqrt{3}-1} > 0$, $|z_0| = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$ et $\arg(z_0) = \frac{2\pi}{3}$ (1pt).