Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 1$^{\text{ère}}$ année, 2024-2025, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Contrôle continu, jeudi 14 novembre 2024

Durée 1h30 ou 2h pour 1/3 temps.
Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et les téléphones, même à titre d'horloge, sont également interdits.
Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (9pt)

L'objectif de cet exercice est de factoriser le polynôme $P = X^6 + (2+i)X^4 + (1+2i)X^2 + i$ dans $\mathbb{C}$.

1. On pose $T = X^4 + 2X^2 + 1$.
   a) Donner, en justifiant, le nombre de racines complexes de T, comptées avec multiplicité.
   b) Démontrer que si $z \in \mathbb{C}$ est racine de T alors $\bar{z}$ est aussi racine de T.
   On admettra dans la suite que z et $\overline{z}$ ont alors la même multiplicité.
   c) Calculer $T(i)$, $T'(i)$ et $T''(i)$.
   d) Déduire des questions précédentes toutes les racines de T ainsi que leur multiplicité.
2. Déterminer un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré 2 tel que $P = TQ$.
3. a) Calculer les racines carrées complexes de $-i$.
   b) En déduire les racines complexes du polynôme Q.
4. Déduire des questions précédentes une factorisation de P dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2 (5.5pt)

On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence telles que $u_0 = 1$ et $v_0 = 12$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n).$$

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = v_n - u_n$, est géométrique en précisant la raison. En déduire la limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elles convergent vers la même limite, que l'on notera $\ell \in \mathbb{R}$.
3. On définit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 99$. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 3 (5.5pt)

Parmi les énoncés suivants, prouver ceux qui sont vrais et donner un contre-exemple pour les autres.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée.
2. Toute suite croissante tend vers $+\infty$.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites stationnaires, alors la suite produit $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. *Indication : on rappelle qu'une suite stationnaire est une suite constante à partir d'un certain rang.*
4. Si une suite tend vers $-\infty$, alors elle est décroissante.

Exercice 4 (3pt)

Donner les limites des suites dont les termes généraux sont énumérés ci-dessous. On pensera à préciser au préalable leur domaine de définition.

1. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$.
2. $v_n = -\frac{\sqrt{n}}{2} + \sin(\ln(n))$.

Exercice 5 (8pt)

1. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, tel que $z \neq i$. On définit de plus $z' \in \mathbb{C}$ tel que

$$z' = \frac{z-1}{z-i}.$$

a) Que pouvez-vous dire de x et y sachant que $z \neq i$? Pourquoi l'hypothèse $z \neq i$ est-elle nécessaire ?

b) Écrire z' sous forme algébrique. Vous exprimerez la partie réelle et imaginaire de z' en fonction de x et y.

c) En déduire que z' est réel si et seulement si $x + y = 1$.

2. On considère l'ensemble de nombres complexes suivant

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \ / \ z \neq i, \ \frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Montrer que 1 et $-1 + 2i$ appartiennent à D.

b) A l'aide de la question 1.c), montrer que l'ensemble D se réécrit

$$D = \{ x + i(1-x) \ / \ x \in \mathbb{R}^* \}.$$

c) En déduire une interprétation géométrique de l'ensemble des points d'affixe $z \in D$.

d) Montrer que $z_0 = \frac{1}{1-\sqrt{3}} - i\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ appartient à D. Puis mettre z_0 sous forme exponentielle.