

Mathématiques et Calcul 1 (MC1) — 2026–2027
Prendre en main les vrai/faux de Roger Mansuy

Sélection après les chapitres 0 et 1 — version du 16 octobre 2026

OBJECTIF DU GUIDE

La page <https://www.rogermansuy.fr/HX2/> propose des questions de cours sous forme de vrai/faux couvrant l'ensemble du programme de première année de MPSI. Elle dépasse donc largement les notions traitées jusqu'à présent en MC1. Ce guide vous aide à choisir les questions adaptées à votre progression en MC1. Il ne s'agit pas d'une liste de devoirs à rendre : le cours et les TD restent prioritaires.

Le site permet de vérifier les réponses, **mais ne fournit pas les justifications. L'essentiel est de chercher à raisonner et de justifier chaque réponse de manière précise et rigoureuse, avant de consulter la réponse proposée.** Un verdict « vrai » ou « faux », même correct, ne suffit pas : il faut expliquer pourquoi.

Deux exemples de rédaction

1. Réfuter une affirmation universelle

Affirmation : « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq x$. »

Réponse insuffisante. « Faux. » Le verdict est correct, mais rien ne le justifie.

Raisonnement incorrect. « Vrai : cela fonctionne pour 0, 1 et 2. » Ces essais peuvent aider à chercher, mais vérifier quelques cas ne prouve pas une affirmation portant sur tous les réels.

Rédaction attendue. L'affirmation est fausse. Prenons $x = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$. Alors $x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = x$. Ce réel contredit donc l'inégalité annoncée.

2. Démontrer une affirmation universelle

Affirmation : soit E un ensemble. Pour toutes parties A, B, C de E , si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.

Rédaction incomplète. « $x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C$, donc $A \subset C$. » L'idée est présente, mais les ensembles, les hypothèses et le rôle de x ne sont pas posés.

Rédaction attendue. Soient A, B, C trois parties de E . Supposons que $A \subset B$ et $B \subset C$. Montrons que $A \subset C$.

Soit $x \in A$. Comme $A \subset B$, on a $x \in B$. Puisque $B \subset C$, on en déduit $x \in C$. Tout élément de A appartient donc à C , d'où $A \subset C$.

Les parties A, B, C ayant été choisies arbitrairement sous les hypothèses de l'énoncé, la propriété universelle est démontrée.

À retenir. Pour réfuter une affirmation universelle, un contre-exemple respectant les hypothèses suffit. Pour la démontrer, il faut partir d'objets arbitraires respectant les hypothèses, et non vérifier seulement quelques cas particuliers.

Méthode de travail.

- (1) Lisez l'énoncé sans cliquer. Identifiez les objets, leurs domaines, les hypothèses et les quantificateurs ; traduisez les notations inconnues à l'aide du guide. Dans votre rédaction, introduisez chaque variable et son domaine avant de l'utiliser. Appuyez-vous sur les définitions et les résultats du cours.
- (2) Cherchez, puis rédigez une justification précise et rigoureuse. Pour une assertion universelle vraie, traitez le cas général ; pour la réfuter, donnez un contre-exemple qui respecte toutes ses hypothèses. Pour une existence, construisez et vérifiez un témoin. Explicitez les étapes décisives et vérifiez les hypothèses des résultats utilisés.
- (3) Cliquez ensuite pour comparer avec la réponse proposée. Une concordance ne valide pas à elle seule votre preuve. En cas de désaccord, reprenez l'énoncé et votre raisonnement en vous aidant du cours.
- (4) Notez les difficultés rencontrées et reprenez quelques jours plus tard les questions qui vous ont résisté, sans regarder votre première réponse.

Trois niveaux de travail.

- **Parcours prioritaire.** Questions à travailler avec les notions des chapitres 0 et 1 et les acquis du lycée. Certaines demandent de chercher : accessible ne signifie pas immédiat.
- **Compléments accessibles.** Quelques définitions ou précisions supplémentaires suffisent. Lisez-les avant de commencer ; ces compléments ne constituent pas de nouveaux attendus du cours.
- **Défis facultatifs.** Questions de synthèse ou de recherche à partir des notions déjà étudiées. Vous pouvez les laisser de côté sans retarder votre travail sur le cours.

Repérer les questions. Les numéros de ce guide désignent leur ordre sur chaque page, en comptant à partir de 1 : le site ne les affiche pas. La sélection a été vérifiée le 16 octobre 2026 ; si la page change, utilisez aussi les repères d'énoncés donnés ci-dessous. Les liens conduisent aux rubriques concernées.

Organisation. Chapitre 0 : page 3 ; chapitre 1 : page 5. Le classement dépend du contenu des questions, pas du titre des rubriques du site.

Ce guide sera enrichi au fil du cours. **Aucune rubrique entière du site n'est recommandée par avance.** N'hésitez cependant pas à papillonner et à explorer d'autres questions, quitte à laisser provisoirement de côté les notions encore inconnues.

Parcours prioritaire. Ensembles, Applications.

- **1 à 8** : inclusions, opérations sur les ensembles et quantificateurs.
- **16 à 21** : surjectivité, injectivité et choix de l'ensemble d'arrivée.
- **24 à 29** : composition, fonction réciproque et exemples d'applications sur un ensemble infini. La réciproque d'une bijection est introduite dans TD0.

Repères : la question 1 porte sur une inclusion entre deux parties d'un ensemble ; la 16 rappelle la définition de la surjectivité ; la 24 porte sur la composée de deux surjections.

Fonctions usuelles : 1 à 8 ; 10 ; 36. Partie entière, parité, périodicité, exponentielle réelle et composition. Réactivez au besoin les définitions rappelées ci-dessous.

Repères : la question 1 porte sur la parité de la partie entière ; la 10 sur la croissance d'une fonction exponentielle réelle ; la 36 commence par « Si f est périodique ».

Fonctions continues : 8 et 9 ; 13 ; 19 et 20 ; 40 et 41. Composition et monotonie, bijections, fonctions bornées. Ces questions ne demandent **pas** la théorie de la continuité.

Repères : la question 8 porte sur la composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante ; la 19 sur une fonction ni minorée ni majorée ; la 40 commence par « Une fonction injective ».

Notations et rappels utiles. Soient E et F deux ensembles.

- $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E . Pour un ensemble A , écrire $A \in \mathcal{P}(E)$ revient à écrire $A \subset E$. Ici, comme sur le site, $\subset$ n'impose pas une inclusion stricte.
- Pour une partie $A \subset E$, A^c ou A^c désigne $E \setminus A$. Le complémentaire dépend de l'ensemble de référence E . Pour deux parties $A, B \subset E$, leur *différence symétrique* est $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- Pour un entier $k \in \mathbb{Z}$, $k\mathbb{Z}$ et $k\mathbb{N}$ désignent respectivement l'ensemble des multiples de k par un entier relatif et par un entier naturel. En particulier, $2\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels pairs.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la *partie entière* de x , notée $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$ en cours, est l'unique entier relatif m tel que $m \leq x < m + 1$. Attention aux nombres négatifs.
- Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Lorsque x parcourt E , les valeurs $f(x)$ forment l'*image de f* , notée $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$. Cet ensemble est inclus dans F , mais ne lui est pas nécessairement égal.
- Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection. Sa *fonction réciproque* $f^{-1} : F \rightarrow E$ associe à chaque $y \in F$ son unique antécédent. Le site emploie aussi le mot « inversible » pour « bijective ».
- Soient $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Elle est *majorée* si $f(D)$ est majoré, et *bornée* si $f(D)$ est borné. Elle est *strictement positive* si, pour tout $x \in D$, $f(x) > 0$. Dans toute recherche de borne, précisez si le majorant ou le minorant proposé est indépendant de x .

Un domaine $D \subset \mathbb{R}$ est *symétrique par rapport à 0* si, pour tout $x \in D$, $-x \in D$. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont le domaine D est symétrique par rapport à 0. Elle est *paire* si, pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$; elle est *impaire* si, pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et T un réel strictement positif. Le réel T est une *période* de f si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + T) = f(x)$. Une période n'est pas nécessairement la plus petite période positive.

Pour les questions sur une composée, supposez toujours les domaines et ensembles d'arrivée compatibles.

Complément — Image et image réciproque d'un ensemble. Ensembles, Applications : 9 à 15 ; 22 et 23. Ces questions deviennent accessibles avec les deux définitions suivantes ; elles prolongent les recherches d'images de TD1.

Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application, $A \subset E$ et B un ensemble quelconque. L'*image* de A par f et l'*image réciproque* de B par f sont définies par

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\}, \quad f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

L'écriture $f^{-1}(B)$ est simplement une notation pour l'ensemble des antécédents par f des éléments de B ; elle a un sens **même si f n'est pas bijective**. Les complémentaires sont pris dans E pour les parties du départ, dans F pour celles de l'arrivée.

Repère : la question 9 compare le complémentaire d'une image réciproque à l'image réciproque d'un complémentaire. Dans toute cette série, on suppose $f : E \rightarrow F$; le site laisse ce cadre implicite.

Une précaution sur la partie entière. La question **9 de Fonctions usuelles** est annoncée vraie pour des entiers a, b non nuls, mais ce verdict n'est pas valable pour tous les entiers négatifs. **Ne l'utilisez pas pour vous autoévaluer en l'état.** Si vous souhaitez la travailler, prenez la variante $a, b \in \mathbb{N}^*$ et cherchez une preuve à partir de la définition de la partie entière.

Parcours prioritaire. Complexes.

- **1 à 11** : formes algébrique et exponentielle, conjugaison, module, arguments et interprétation géométrique.
- **15 à 20** : transformations du plan, exponentielle complexe, surjectivité et équations du second degré.
- **24** : factorisation d'une expression du second degré à l'aide des formules d'Euler.

Repères : la question 1 porte sur la partie réelle de $\left(\frac{1}{2+i}\right)^2$; la 15 sur une transformation affine du plan complexe ; la 24 commence par « Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ » et porte sur une factorisation trigonométrique.

Manipulations.

- **1 à 5 ; 8 et 9** : sommes finies et indices de sommation. Pour les questions 8 et 9, il suffit de comparer les termes réellement parcourus ; aucune théorie des limites n'intervient.
- **13 et 14** : sommes géométriques.
- **18 ; 20 à 22** : formule du binôme de Newton.
- **24 et 25** : identités et factorisations.

Repères : la question 1 est une somme de puissances de -1 ; la 13 une somme de puissances de 2 ; la 18 une somme de coefficients binomiaux ; la 24 porte sur une différence de puissances.

Fonctions usuelles : 19 à 25. Combinaisons de sinus et de cosinus, formules trigonométriques et restrictions de la fonction cosinus donnant ou non une bijection. Pour les questions 19 et 20, il s'agit de chercher deux constantes, indépendantes de la variable réelle.

Repère : la question 19 commence par « Pour tous $A, B \in \mathbb{R}$ » et propose une écriture d'une combinaison linéaire de cosinus et de sinus à l'aide d'un seul sinus.

Notations et cadre des calculs.

- $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Un argument n'est défini que pour un complexe non nul et est déterminé à un multiple entier de 2π près.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z)$ désigne e^z . Pour un réel θ , $e^{i\theta}$ est un cas particulier, où l'exposant est purement imaginaire.
- Dans les questions sur les sommes, n est un entier naturel soumis à l'inégalité annoncée. La lettre sous le symbole $\sum$ est un *indice muet* ; les bornes et la liste des termes comptent autant que la formule du terme.
- Les indices i, j, k sont entiers. Les lettres u_k, a_k ou $a_{i,j}$ désignent des nombres réels ou complexes arbitraires, pour les indices utilisés.
- Pour un entier naturel n et un entier k tel que $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, où $0! = 1$. Dans les reformulations des questions 19 et 23 de « Manipulations », proposées plus loin, l'indice inférieur de chaque coefficient binomial est compris entre 0 et n .
- Pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Vérifiez les domaines de définition avant de transformer une formule contenant des tangentes.

Complément — Géométrie du plan complexe. Complexes : 12 à 14. Ces questions traduisent en langage complexe des notions du lycée : produit scalaire, équation de droite et vecteur normal. Elles sont raisonnablement accessibles sans nouveau théorème sur les complexes.

Soient $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$. Dans un repère orthonormé, le vecteur d'affixe $z = x + iy$ a pour coordonnées (x, y) . Le produit scalaire de deux vecteurs de coordonnées (x, y) et (x', y') vaut $xx' + yy'$. Un vecteur normal à une droite est un vecteur non nul orthogonal à sa direction. Vous pouvez donc traduire les énoncés en coordonnées réelles pour les examiner.

Complément — Parité des indices et sommes doubles. Manipulations : 6 et 7 ; 10 à 12.

Soient $m \geq 1$ un entier et $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a est *congru à b modulo m* si m divise $a - b$, c'est-à-dire s'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a - b = mq$. On note alors $a \equiv b \pmod{m}$. Le site utilise l'écriture $a = b[m]$ pour exprimer cette même relation : il ne s'agit pas d'une égalité ordinaire.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Par définition, k est pair s'il est divisible par 2. Or $k = 0[2]$ signifie que 2 divise $k - 0 = k$: cette notation exprime donc exactement que k est pair. De même, $k = 1[2]$ signifie que 2 divise $k - 1$, autrement dit qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $k = 2q + 1$: cela exprime que k est impair.

Sous un symbole $\sum$, une telle condition restreint les indices retenus. Par exemple, soient $a_0, \dots, a_5$ des nombres réels ou complexes. On a

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq 5 \\ k=0[2]}} a_k = a_0 + a_2 + a_4, \quad \sum_{\substack{0 \leq k \leq 5 \\ k=1[2]}} a_k = a_1 + a_3 + a_5.$$

La première somme ne retient que les indices pairs, la seconde que les indices impairs.

Pour un entier naturel n , la notation $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour tous $i, j \in \{0, \dots, n\}$, soit $a_{i,j}$ un nombre réel ou complexe. Une somme double est une somme finie de sommes finies : dans $\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j}$, on fixe d'abord i , puis on fait varier j de i à n . Avant de réordonner les termes, identifiez précisément les couples d'indices parcourus.

Les questions **19** et **23** emploient des indices binomiaux hors de leur domaine habituel ; la 23 fait aussi apparaître des puissances négatives qui peuvent ne pas avoir de sens. Pour éviter ces difficultés de convention, travaillez plutôt sur les deux variantes suivantes, **sans utiliser les boutons de réponse du site**. Pour $n \geq 1$ entier et $x, y \in \mathbb{R}$, déterminer si chacune des identités suivantes est vraie, et justifier :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} = 2^{n-1},$$

$$(x+y)^n - (x-y)^n = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} x^{n-2k-1} y^{2k+1}.$$

Ces expressions sont lues comme des expressions polynomiales : un facteur d'exposant nul vaut 1, y compris lorsque la variable vaut 0.

Défis facultatifs — Calculer avec j et quelques racines de l'unité. Il n'est pas nécessaire de connaître la théorie générale des racines de l'unité pour traiter les questions ci-dessous. Elles sont **facultatives** : la construction systématique des racines de l'unité ne fait pas partie du parcours actuel de MC1.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \quad \mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}.$$

Attention : j est ici un nombre complexe fixé, pas un indice muet. Un élément de $\mathbb{U}_n$ est appelé une *racine n -ième de l'unité*. Pour des entiers positifs m, n , « m divise n » signifie qu'il existe un entier q tel que $n = mq$.

- **Premiers prolongements : Complexes, 23 ; 25 à 29 ; Manipulations, 17.** Calculs avec j , puissances et conjugaison. Pour la question 29 de « Complexes », on peut lire un polynôme réel comme une fonction $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$: pour un entier $d \in \mathbb{N}$ et des réels $a_0, \dots, a_d$ fixés, on pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \sum_{k=0}^d a_k z^k$. Aucune théorie de factorisation n'est nécessaire.
- **Pour chercher davantage : Complexes, 30 à 32 ; 34 à 36 ; 39 ; Manipulations, 15 et 16.** Utilisez les définitions, les puissances et les sommes géométriques. Distinguez une propriété vraie pour toute racine d'une propriété que vous avez seulement vérifiée sur un exemple.
- **Synthèse : Complexes, 38 et 40.** Construire une bijection, ou chercher des antécédents d'une application sur $\mathbb{U}_n$. Les outils disponibles suffisent, mais la recherche est plus exigeante.

Repères : la question 23 de « Complexes » porte sur $-j$; la 30 commence par « Si $\omega \in \mathbb{U}$ » ; la 38 compare $\mathbb{U}_n$ aux solutions de $\omega^n = -1$.

Non retenues ici : Complexes, 21 et 22 ; 33 et 37. Les deux premières concernent les fonctions polynomiales de degré quelconque et dépassent les résultats disponibles après le second degré. Les deux autres demandent une étude globale de l'ensemble des racines n -ièmes ; les définitions données ici ne constituent pas cette étude.