Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Exercices complémentaires d'entraînement - Développements limités et équivalents

Formule de Taylor-Young et développement limité

Soit f une fonction définie sur I un intervalle voisinage de $a \in I$. Si f est dérivable n-fois en a alors la Formule de Taylor-Young à l'ordre n en a pour f est donnée par

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + o_{x\to a}((x-a)^n).$$

On dira que f admet un développement limité à l'ordre n en a, noté DL_n en a, si

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n\frac{(x-a)^n}{n!} + o_{x\to a}((x-a)^n).$$

où $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sont nécessairement uniques. Ainsi une fonction n-fois dérivable en a admet nécessairement un DL_n en a. *La réciproque est fausse en général (sauf si $n \in \{0,1\}$).*

On peut effectuer diverses opérations sur les DL, dont sommer, multiplier, quotienter, mais aussi "intégrer". En effet, si f admet F comme primitive sur I et f a un DL_n en a :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n\frac{(x-a)^n}{n!} + o_{x\to a}((x-a)^n).$$

alors F admet un DL_{n+1} en a donné par :

$$F(x) = F(a) + \alpha_0(x-a) + \alpha_1\frac{(x-a)^2}{2} + \ldots + \alpha_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + o_{x\to a}((x-a)^{n+1}).$$

Développements limités essentiels

On rappelle les deux développements limités en 0 (à connaître par coeur absolument !) suivants :

— "somme géométrique" : $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o_{x\to 0}(x^n)$,

— "exponentielle" : $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o_{x\to 0}(x^n)$,

Exercice 1.
A partir des deux développements limités donnés au dessus, retrouver les développements limités (à l'ordre n quand ce n'est pas précisé) en 0 des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$,
2. $x \mapsto \ln(1-x)$,
3. $x \mapsto \ln(1+x)$,
4. DL_3, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, de $x \mapsto (1+x)^\alpha$
5. DL_{2n} de $x \mapsto \cos(x)$,
6. DL_{2n+1} de $x \mapsto \sin(x)$,
7. DL_3 de $x \mapsto \tan(x)$.

Ces développements limités font également partis de la liste de ceux à connaître par coeur.

<u>Correction.</u>

1. $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o_{x\to 0}(x^n)$.

2. $x \mapsto \ln(1-x)$ est une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{1-x}$, donc $x \mapsto \ln(1-x) = -\left(x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{x^n}{n}\right) + o_{x\to 0}(x^n)$.

3. D'après la question précédente, on a $\ln(1+x) = \ln(1-(-x)) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + o_{x\to 0}(x^n)$.

4. On a

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= e^{\alpha\ln(1+x)} = e^{\alpha(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o_{x\to 0}(x^3))},\\
&= 1+\alpha\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o_{x\to 0}(x^3)\right)+\frac{1}{2!}\left(\alpha\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o_{x\to 0}(x^3)\right)\right)^2\\
&+\frac{1}{3!}\left(\alpha\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o_{x\to 0}(x^3)\right)\right)^3+o_{x\to 0}(x^3),\\
&= 1+\alpha\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o_{x\to 0}(x^3)\right)+\frac{1}{2!}\left(\alpha^2x^2-2\alpha^2\frac{x^3}{2}+o_{x\to 0}(x^3)\right)\\
&+\frac{1}{3!}\left(\alpha^3x^3+o_{x\to 0}(x^3)\right)+o_{x\to 0}(x^3),\\
&= 1+\alpha x+\left(-\alpha\frac{x^2}{2}+\frac{\alpha^2}{2}x^2\right)+\left(\alpha\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2!}2\alpha^2\frac{x^3}{2}+\frac{1}{3!}\alpha^3x^3\right)+o_{x\to 0}(x^3),\\
&= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\alpha\frac{2-3\alpha+\alpha^2}{3!}x^3+o_{x\to 0}(x^3),\\
&= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+o_{x\to 0}(x^3).
\end{aligned}$$

5. $\cos(x)=\mathrm{Re}(e^{ix})$, or $e^{ix}=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\dots\frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}+o_{x\to 0}(x^{2n})$, d'où $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o_{x\to 0}(x^{2n})$.

6. $\sin(x)=\mathrm{Im}(e^{ix})$, donc $\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o_{x\to 0}(x^{2n+1})$.

7. On a

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x-\frac{x^3}{3!}+o_{x\to 0}(x^4)}{1-\frac{x^2}{2!}+o_{x\to 0}(x^3)},\\
&= \left(x-\frac{x^3}{3!}+o_{x\to 0}(x^4)\right)\left(1+\left(\frac{x^2}{2!}+o_{x\to 0}(x^3)\right)+o_{x\to 0}\left(\left(\frac{x^2}{2!}+o_{x\to 0}(x^3)\right)^2\right)\right),\\
&= \left(x-\frac{x^3}{3!}+o_{x\to 0}(x^4)\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+o_{x\to 0}(x^2)\right) = x+\frac{x^3}{2!}-\frac{x^3}{3!}+o_{x\to 0}(x^3),\\
&= x+\frac{x^3}{3}+o_{x\to 0}(x^3).
\end{aligned}$$

Pour la troisième égalité, on a utilisé le DL de $\frac{1}{1-u}$ lorsque $u\to 0$.

Exercice 2.
A partir des deux développements limités donnés au dessus, trouver les développements limités en 0 des fonctions suivantes.

1. DL_{2n} de $x\mapsto \mathrm{ch}(x)$.
2. DL_{2n+1} de $x\mapsto \mathrm{sh}(x)$.
3. DL_3 de $x\mapsto \mathrm{th}(x)$.
4. Sachant que $\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, donner un DL_5 de $x\mapsto \arcsin(x)$.
5. $x\mapsto \arctan(x)$.

Il est important de savoir retrouver rapidement ces développements limités par le calcul (au moins les premiers termes). On peut ajouter à la liste celui de arccos qui s'obtient de la même manière que celui de arcsin.

Correction.

1. Comme $\mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, ch est une fonction paire et son DL est donc obtenu en conservant seulement les termes qui définissent des fonctions paires. On a donc $\mathrm{ch}(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o_{x\to 0}(x^{2n})$.

Si ce n'est pas convaincant, il suffit de mener le calcul en remplaçant e^x et e^{-x} par leurs DL et les simplifications des termes en x^{2k+1} vont se faire immédiatement.

2. Comme $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, sh est une fonction impaire et son DL est donc obtenu en conservant seulement les termes qui définissent des fonctions impaires. On a donc $\mathrm{sh}(x) = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x\to 0}(x^{2n+1})$.

3. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} &= \frac{x + \frac{x^3}{3!} + o_{x\to 0}(x^4)}{1 + \frac{x^2}{2!} + o_{x\to 0}(x^3)}, \\
&= \left(x + \frac{x^3}{3!} + o_{x\to 0}(x^4)\right)\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + o_{x\to 0}(x^3)\right) + o_{x\to 0}\left(\left(-\frac{x^2}{2!} + o_{x\to 0}(x^3)\right)^2\right)\right), \\
&= x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^3}{2!} + o_{x\to 0}(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o_{x\to 0}(x^3).
\end{aligned}$$

4. On a $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, donc on applique le DL de $(1+u)^\alpha$. On obtient $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)(-x^2) + \left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{2} - 1\right)\dfrac{(-x^2)^2}{2!} + o_{x\to 0}(x^5) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{8}x^4 + o_{x\to 0}(x^5)$. Comme arcsin est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, il suffit de "primitiver" le DL, on obtient donc

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + o_{x\to 0}(x^6).$$

5. La fonction arctan est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Or $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + o_{x\to 0}(x^{2n})$ en fait on peut même éventuellement remplacer $o_{x\to 0}(x^{2n})$ par $o_{x\to 0}(x^{2n+1})$, qui est plus précis, car on sait que le terme suivant du DL sera en x^{2n+2}. En "primitivant" le DL, on obtient donc

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_{x\to 0}(x^{2n+2}).$$

Exercice 3.
Dans la suite, quand un équivalent est demandé, on donnera le plus simple.

1. Donner le DL à l'ordre 3 de $x \mapsto e^x$ en 0.
2. Donner le DL à l'ordre 2 de $x \mapsto e^{-2x}$ en 0.
3. $\dfrac{e^{\frac{x^2}{2}} - 1}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\sim}$?
4. Donner le DL à l'ordre 4 de $x \mapsto \cos(x)$ en 0.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1-\cos(\sqrt{2}x)}{x^n} \underset{x\to 0}{\sim}$?
6. Donner le DL à l'ordre 3 de $x \mapsto \sin(x)$ en 0.
7. $\sin(x)^4 - x^3 \underset{x\to 0}{\sim}$?
8. $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim}$?
9. $\sin\left(\dfrac{1}{1-x} - 1\right)^2 + x^3e^{-x} + xe^x \underset{x\to 0}{\sim}$?
10. $\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{\sim}$?
11. $\ln(\tan(x)) \underset{x\to 0}{\sim}$?
12. $\ln(x)^3\left(\dfrac{1}{1+e^{-x}} - \cos(\dfrac{1}{x})\right) + e^{-2x} \underset{x\to+\infty}{\sim}$?
13. $x^3 + x^2(\ln(x))^4 \underset{x\to+\infty}{\sim}$?
14. $x^3 + x^2(\ln(x))^4 \underset{x\to 0}{\sim}$?
15. $2xe^x + x \underset{x\to 0}{\sim}$?
16. $(x-2)^2e^x - (x^5 + 7x^2)e^{\frac{x}{3}} \underset{x\to+\infty}{\sim}$?
17. $2^x - e^x + x^3e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\sim}$?
18. $\ln\left(\cos(e^{-x}) + \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) - \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim}$?
19. $\dfrac{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right)\ln(1+e^{-x})}{\sin(e^{-x+1})\ln\left(1 - \frac{1}{(x+\sqrt{x})^2}\right)} \underset{x\to+\infty}{\sim}$?
20. Donner le signe à partir d'un certain rang de $-2^n - n^3 + (2n)!$.
21. Donner le signe à partir d'un certain rang de $n^4 - 3n^2 + (\ln(n))^9 - n^3(\ln(n))^2$.
22. $e^{-\sqrt{n}}(n+1)! \underset{n\to+\infty}{\sim}$?
23. $\ln(1 - \dfrac{1}{n!}) - \dfrac{1}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\sim}$?
24. $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim}$?
25. $\cos(\dfrac{1}{n^n}) + \dfrac{1}{(n+3)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim}$?

26. $\sin\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right) + e^{-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} ?$

27. $\tan\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right) - \frac{1}{n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} ?$

28. $\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} ?$

29. $n^2 e^{\frac{n}{2}} + (n-1)^3 e^{\frac{n}{3}} \underset{n\to+\infty}{\sim} ?$

30. $(n-7)\ln(n^2+2) \underset{n\to+\infty}{\sim} ?$

31. $\frac{n-1}{3}\ln(n)^5 + (n+\sqrt{n+1}-7)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} ?$

32. $\frac{(n-\pi)^n}{n^n+10^n-(3n)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} ?$

33. $\frac{n}{1-\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} ?$

34. $\frac{1}{1-\frac{1}{(n-1)^3}} - \frac{1}{1+\frac{1}{(n+3)^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} ?$

35. $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{3n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} ?$

Correction.

1. Donner le DL à l'ordre 3 de $x \mapsto e^x$ en 0.

On a $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o_{x\to0}(x^3)$.

2. Donner le DL à l'ordre 2 de $x \mapsto e^{-2x}$ en 0.

On a $e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{(-2x)^2}{2!} + o_{x\to0}(x^3) = 1 - 2x + 2x^2 + o_{x\to0}(x^3)$.

3. $\frac{e^{\frac{x^2}{2}}-1}{\sqrt{x}} \underset{x\to0}{\sim} ?$

On a $e^{\frac{x^2}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + o_{x\to0}(x^3)$, donc $\frac{e^{\frac{x^2}{2}}-1}{\sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2} + o_{x\to0}(x^{3-\frac{1}{2}})$. Ainsi $\frac{e^{\frac{x^2}{2}}-1}{\sqrt{x}} \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}$.

4. Donner le DL à l'ordre 4 de $x \mapsto \cos(x)$ en 0.

On a $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o_{x\to0}(x^5)$.

On aurait pu mettre $o_{x\to0}(x^4)$ à la place de $o_{x\to0}(x^5)$, comme c'est normalement attendu dans un DL_4, et cela aurait été tout à fait correct. Mais on sait que le terme suivant du développement limité de cos en 0 est en x^6, qui est bien un $o_{x\to0}(x^4)$ mais également un $o_{x\to0}(x^5)$, ce qui est plus précis.

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1-\cos(\sqrt{2}x)}{x^n} \underset{x\to0}{\sim} ?$

On a $\cos(\sqrt{2}x) = 1 - \frac{(\sqrt{2}x)^2}{2!} + o_{x\to0}(x^3)$, donc $\frac{1-\cos(\sqrt{2}x)}{x^n} = x^{2-n} + o_{x\to0}(x^{3-n}) = x^{2-n}(1+o_{x\to0}(x))$, d'où $\frac{1-\cos(\sqrt{2}x)}{x^n} \underset{x\to0}{\sim} x^{2-n}$.

6. Donner le DL à l'ordre 3 de $x \mapsto \sin(x)$ en 0.

On a $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o_{x\to0}(x^4)$.

Même remarque que pour le DL de cos au-dessus. On choisit d'écrire $o_{x\to0}(x^4)$, car le terme suivant du DL est en x^5, qui est plus précis que $o_{x\to0}(x^3)$ (bien que tout à fait correct également).

7. $\sin(x)^4 - x^3 \underset{x\to0}{\sim} ?$

Attention à ne pas faire l'erreur de sommer des équilavents, **ce qui est interdit sans hypothèses supplémentaires**, car on serait très tenter de dire $\sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x$ donc $\sin(x)^4 - x^3 \underset{x\to0}{\sim} x^4 - x^3 \underset{x\to0}{\sim} -x^3$ (même si les équivalents successifs sont vrais, l'argument de sommation utilisé pour le premier est faux et peut mener à des erreurs dans d'autres situations). Comme on intuite que le terme dominant est $-x^3$, pour effectuer le raisonnement proprement on le met en facteur puis essaye de montrer que l'autre terme s'écrit comme $1+\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$.

On a $\sin(x)^4 - x^3 = -x^3\left(1 - \frac{\sin(x)^4}{x^3}\right)$, mais $\frac{\sin(x)^4}{x^3} \underset{x\to0}{\sim} x$, donc $\frac{\sin(x)^4}{x^3} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$. D'où $\sin(x)^4 - x^3 \underset{x\to0}{\sim} -x^3$.

Alternativement, on peut faire un DL (en 0) de $\sin(x)^4$ en utilisant ceux de $\sin(x)$ et $(1+u)^4$.

$\sin(x)^4 - x^3 = (x+o_{x\to0}(x))^4 - x^3 = x^4(1+o_{x\to0}(1))^4 - x^3 = x^4(1+o_{x\to0}(1)) - x^3 = -x^3(1 - \underbrace{x + o_{x\to0}(x)}_{\underset{x\to0}{\longrightarrow} 0})$.

D'où de nouveau $\sin(x)^4 - x^3 \underset{x\to0}{\sim} -x^3$.

8. $\tan(x) \underset{x\to0}{\sim} ?$

On a vu dans l'exercice 1 que $\tan(x) = x + o_{x\to0}(x)$, donc $\tan(x) \underset{x\to0}{\sim} x$.

Sinon $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$, d'où $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

9. $\sin\left(\dfrac{1}{1-x} - 1\right)^2 + x^3e^{-x} + xe^x \underset{x\to 0}{\sim}$?

On se doute que le terme qui domine est xe^x à cause de e^x et le fait que le $\sin(\dots)^2$ se comporte comme $\sin(x)^2$ donc x^2 (qui est négligeable par rapport à xe^x). Justifions proprement.

On a $\dfrac{1}{1-x} - 1 = x + o_{x\to 0}(x)$ et $\sin(x + o_{x\to 0}(x)) = x + o_{x\to 0}(x) + \underbrace{o_{x\to 0}(x + o_{x\to 0}(x))}_{=o_{x\to 0}(x)}$, donc $\sin\left(\dfrac{1}{1-x} - 1\right)^2 = (x + o_{x\to 0}(x))^2 = x^2 + o_{x\to 0}(x^2)$. Ainsi $\sin\left(\dfrac{1}{1-x} - 1\right)^2 + x^3e^{-x} + xe^x = xe^x\left(1 + xe^{-x} + o_{x\to 0}(xe^{-x}) + x^2e^{-2x}\right)$.

Or $xe^{-x} + o_{x\to 0}(xe^{-x}) + x^2e^{-2x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, d'où $\sin\left(\dfrac{1}{1-x} - 1\right)^2 + x^3e^{-x} + xe^x \underset{x\to 0}{\sim} xe^x$.

10. $\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{\sim}$?

On a $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + o_{x\to 0}(x^2)$, donc $\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2)\right) = -\dfrac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2) + o_{x\to 0}\left(-\dfrac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2)\right) = -\dfrac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2)$. D'où $\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.

On a utilisé le fait que $\ln(1+u) = u + o_{u\to 0}(u)$.

11. $\ln(\tan(x)) \underset{x\to 0}{\sim}$?

On a $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o_{x\to 0}(x^3)$, donc $\ln(\tan(x)) = \ln\left(x + \dfrac{x^3}{3} + o_{x\to 0}(x^3)\right) = \ln(x) + \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{3} + o_{x\to 0}(x^2)\right) = \ln(x) + \left(\dfrac{x^2}{3} + o_{x\to 0}(x^2)\right) + \underbrace{o_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{3} + o_{x\to 0}(x^2)\right)}_{=o_{x\to 0}(x^2)} = \ln(x) + \dfrac{x^2}{3} + o_{x\to 0}(x^2) = \ln(x) + o_{x\to 0}(\ln(x))$. Donc $\ln(\tan(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$.

Rappel : $\forall a, b > 0$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Attention la composition d'équivalents est fausse en général. Donc ici on n'utilise pas l'argument : $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\ln(\tan(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$. On fait plutôt un calcul direct de développements limités (on a le droit de composer des DL, contrairement aux équivalents).

12. $\ln(x)^3\left(\dfrac{1}{1+e^{-x}} - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) + e^{-2x} \underset{x\to +\infty}{\sim}$?

On a $\dfrac{1}{1+e^{-x}} = 1 - e^{-x} + o_{x\to +\infty}(e^{-x})$ et $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1 - \dfrac{1}{2x^2} + o_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Donc $\dfrac{1}{1+e^{-x}} - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = -e^{-x} + o_{x\to +\infty}(e^{-x}) + \dfrac{1}{2x^2} + o_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Mais $-e^{-x} + o_{x\to +\infty}(e^{-x}) = o_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, par croissance comparée, donc $\dfrac{1}{1+e^{-x}} - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{2x^2} + o_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. D'où $\ln(x)^3\left(\dfrac{1}{1+e^{-x}} - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) + e^{-2x} = \dfrac{\ln(x)^3}{2x^2} + o_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\ln(x)^3}{x^2}\right) + \underbrace{e^{-2x}}_{=o_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(x)^3}{x^2}\right)} = \dfrac{\ln(x)^3}{2x^2} + o_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\ln(x)^3}{x^2}\right)$. Ainsi $\ln(x)^3\left(\dfrac{1}{1+e^{-x}} - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) + e^{-2x} \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)^3}{2x^2}$.

On a utilisé le fait que $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + o_{u\to 0}(u^2)$ et $\cos(u) = 1 - \dfrac{u^2}{2} + o_{u\to 0}(u^2)$.

13. $x^3 + x^2(\ln(x))^4 \underset{x\to +\infty}{\sim}$?

$x^3 + x^2(\ln(x))^4 = x^3\left(1 + \dfrac{\ln(x)^4}{x}\right)$ et $\dfrac{\ln(x)^4}{x} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée. Donc $x^3 + x^2(\ln(x))^4 \underset{x\to +\infty}{\sim} x^3$.

14. $x^3 + x^2(\ln(x))^4 \underset{x\to 0}{\sim}$?

$x^3 + x^2(\ln(x))^4 = x^2(\ln(x))^4\left(1 + \dfrac{x}{\ln(x)^4}\right)$ et $\dfrac{x}{\ln(x)^4} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc $x^3 + x^2(\ln(x))^4 \underset{x\to 0}{\sim} x^2(\ln(x))^4$.

15. $2xe^x + x \underset{x\to 0}{\sim}$?

$2xe^x + x = 2x(1 + o_{x\to 0}(1)) + x = 3x + o_{x\to 0}(x)$, donc $2xe^x + x \underset{x\to 0}{\sim} 3x$.

16. $(x-2)^2e^x-(x^5+7x^2)e^{\frac{x}{3}} \underset{x\to+\infty}{\sim}$?

On a $(x-2)^2e^x-(x^5+7x^2)e^{\frac{x}{3}} = x^2e^x\left(\left(1-\frac{2}{x}\right)-(x^3+7)e^{-\frac{2}{3}x}\right) = x^2e^x\left(1\underbrace{-\frac{2}{x}-(x^3+7)e^{-\frac{2}{3}x}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0}\right)$, donc $(x-2)^2e^x-(x^5+7x^2)e^{\frac{x}{3}} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2e^x$.

17. $2^x-e^x+x^3e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\sim}$?

$2^x-e^x+x^3e^{-x} = -e^x\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^x-x^3e^{-2x}\right)$. Donc $2^x-e^x+x^3e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\sim} -e^x$.

18. $\ln\left(\cos(e^{-x})+\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)-\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim}$?

On a $\cos(e^{-x})+\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1+o_{x\to+\infty}(e^{-x})+\frac{1}{\sqrt{x}}+o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1+\frac{1}{\sqrt{x}}+o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Donc $\ln\left(\cos(e^{-x})+\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)-\frac{1}{x} = \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}+o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)-\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}+o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}+o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Donc $\ln\left(\cos(e^{-x})+\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)-\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$.

19. $\dfrac{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)\ln(1+e^{-x})}{\sin(e^{-x+1})\ln\left(1-\frac{1}{(x+\sqrt{x})^2}\right)} \underset{x\to+\infty}{\sim}$?

On a $\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}-1 = 1-\frac{1}{x^2}+o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}+o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Puis $\ln(1+e^{-x}) = e^{-x}+o_{x\to+\infty}(e^{-x})$. Donc $\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)\ln(1+e^{-x}) = \left(-\frac{1}{x^2}+o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)(e^{-x}+o_{x\to+\infty}(e^{-x})) = -\frac{e^{-x}}{x^2}+o_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x^2}\right)$.
Pour le dénominateur, $\sin(e^{-x+1}) = e^{-x+1}+o_{x\to+\infty}(e^{-x+1})$ et

$$\frac{1}{(x+\sqrt{x})^2} = \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-2} = \frac{1}{x^2}\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) = \frac{1}{x^2}+o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

ainsi $\ln\left(1-\frac{1}{(x+\sqrt{x})^2}\right) = -\frac{1}{x^2}+o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Donc

$$\begin{aligned}\sin(e^{-x+1})\ln\left(1-\frac{1}{(x+\sqrt{x})^2}\right) &= \left(e^{-x+1}+o_{x\to+\infty}(e^{-x+1})\right)\left(-\frac{1}{x^2}+o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right),\\ &= -\frac{e^{-x+1}}{x^2}+o_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-x+1}}{x^2}\right) = -\frac{e^{-x+1}}{x^2}+o_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x^2}\right).\end{aligned}$$

Finalement

$$\frac{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)\ln(1+e^{-x})}{\sin(e^{-x+1})\ln\left(1-\frac{1}{(x+\sqrt{x})^2}\right)} = \frac{-\frac{e^{-x}}{x^2}+o_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x^2}\right)}{-\frac{e^{-x+1}}{x^2}+o_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-x+1}}{x^2}\right)} = \frac{1+o_{x\to+\infty}(1)}{e+o_{x\to+\infty}(1)} = \frac{1}{e}+o_{x\to+\infty}(1).$$

D'où $\dfrac{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)\ln(1+e^{-x})}{\sin(e^{-x+1})\ln\left(1-\frac{1}{(x+\sqrt{x})^2}\right)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{e}$.

20. Donner le signe à partir d'un certain rang de $-2^n-n^3+(2n)!$.
Le terme qui domine est $(2n)!$ par croissance comparée. Donc $-2^n-n^3+(2n)!$ est positif APCR.

21. Donner le signe à partir d'un certain rang de $n^4-3n^2+(\ln(n))^9-n^3(\ln(n))^2$.
Le terme qui domine est n^4 par croissance comparée. Donc $n^4-3n^2+(\ln(n))^9-n^3(\ln(n))^2$ est positif APCR.

22. $e^{-\sqrt{n}}(n+1)! \underset{n\to+\infty}{\sim}$?

$e^{-\sqrt{n}}(n+1)! \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}n!n$.

23. $\ln(1-\frac{1}{n!}) - \frac{1}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\sim}$?

On utilise le développement limité de $\ln(1-u)$ quand $u \to 0$, car $\frac{1}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a $\ln(1-\frac{1}{n!}) = -\frac{1}{n!} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)$, donc $\ln(1-\frac{1}{n!}) - \frac{1}{(2n)!} = -\frac{1}{n!} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n!}\right) - \frac{1}{(2n)!} = -\frac{1}{n!} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)$, donc $\ln(1-\frac{1}{n!}) - \frac{1}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n!}$.

24. $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim}$?

On utilise le développement limité de e^u quand $u \to 0$, car $\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2!}\frac{1}{n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2!}\frac{1}{n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$, i.e. $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

25. $\cos\left(\frac{1}{n^n}\right) + \frac{1}{(n+3)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim}$?

On a $\cos\left(\frac{1}{n^n}\right) = 1 + o_{n\to+\infty}(1)$ comme $\frac{1}{n^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Et comme $\frac{1}{(n+3)^2} = o_{n\to+\infty}(1)$, on a $\cos\left(\frac{1}{n^n}\right) + \frac{1}{(n+3)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

26. $\sin\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right) + e^{-n} \underset{n\to+\infty}{\sim}$?

On a $\sin\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right) = \frac{1}{n^{n+1}} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right)$. Or $\frac{1}{n^{n+1}} = o_{n\to+\infty}\left(e^{-n}\right)$ par croissance comparée. Donc $\sin\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right) + e^{-n} = e^{-n} + o_{n\to+\infty}\left(e^{-n}\right)$, i.e. $\sin\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right) + e^{-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$.

27. $\tan\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right) - \frac{1}{n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim}$?

On a $\tan\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right) = \frac{1}{n^{n+1}} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right)$. Or $\frac{1}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}\frac{1}{n^n} = o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^n}\right)$, donc $\tan\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right) - \frac{1}{n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^n}$.

28. $\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim}$?

On a $\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2} = e^{n^2\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = e^{n^2\left(\frac{2}{n^2}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{2+o_{n\to+\infty}(1)}$. D'où $\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^2$.

29. $n^2e^{\frac{n}{2}} + (n-1)^3e^{\frac{n}{3}} \underset{n\to+\infty}{\sim}$?

On a $n^2e^{\frac{n}{2}} + (n-1)^3e^{\frac{n}{3}} = n^2e^{\frac{n}{2}}\left(1+\frac{(n-1)^3}{n^2}e^{-\frac{n}{6}}\right)$. Or $\frac{(n-1)^3}{n^2}e^{-\frac{n}{6}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée, donc $n^2e^{\frac{n}{2}} + (n-1)^3e^{\frac{n}{3}} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2e^{\frac{n}{2}}$.

30. $(n-7)\ln(n^2+2) \underset{n\to+\infty}{\sim}$?

On a

$$\begin{aligned}(n-7)\ln(n^2+2) &= (n-7)\ln\left(n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\right) = (n-7)\ln(n^2) + (n-7)\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right),\\ &= 2n\ln(n)\underbrace{-14\ln(n) + (n-7)\frac{2}{n^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}_{=o_{n\to+\infty}(n\ln(n))},\end{aligned}$$

donc $(n-7)\ln(n^2+2) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\ln(n)$.

31. $\frac{n-1}{3}\ln(n)^5 + (n+\sqrt{n+1}-7)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim}$?

$\frac{n-1}{3}\ln(n)^5 + (n+\sqrt{n+1}-7)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$.

32. $\dfrac{(n-\pi)^n}{n^n+10^n-(3n)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} ?$

$\dfrac{(n-\pi)^n}{n^n+10^n-(3n)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1.$

33. $\dfrac{n}{1-\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} ?$

$\dfrac{n}{1-\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}.$

34. $\dfrac{1}{1-\frac{1}{(n-1)^3}} - \dfrac{1}{1+\frac{1}{(n+3)^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} ?$

$\dfrac{1}{1-\frac{1}{(n-1)^3}} - \dfrac{1}{1+\frac{1}{(n+3)^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}.$

35. $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{3n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} ?$

$e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{3n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}.$
