Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Exercices complémentaires d'entraînement - Développements limités et équivalents

Formule de Taylor-Young et développement limité

Soit f une fonction définie sur I un intervalle voisinage de $a \in I$. Si f est dérivable n-fois en a alors la Formule de Taylor-Young à l'ordre n en a pour f est donnée par

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + o_{x\to a}((x-a)^n).$$

On dira que f admet un développement limité à l'ordre n en a, noté DL_n en a, si

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n\frac{(x-a)^n}{n!} + o_{x\to a}((x-a)^n).$$

où $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sont nécessairement uniques. Ainsi une fonction n-fois dérivable en a admet nécessairement un DL_n en a. *La réciproque est fausse en général (sauf si $n \in \{0,1\}$).*

On peut effectuer diverses opérations sur les DL, dont sommer, multiplier, quotienter, mais aussi "intégrer". En effet, si f admet F comme primitive sur I et f a un DL_n en a :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n\frac{(x-a)^n}{n!} + o_{x\to a}((x-a)^n).$$

alors F admet un DL_{n+1} en a donné par :

$$F(x) = F(a) + \alpha_0(x-a) + \alpha_1\frac{(x-a)^2}{2} + \ldots + \alpha_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + o_{x\to a}((x-a)^{n+1}).$$

Développements limités essentiels

On rappelle les deux développements limités en 0 (à connaître par coeur absolument !) suivants :

— "somme géométrique" : $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o_{x\to 0}(x^n)$,

— "exponentielle" : $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o_{x\to 0}(x^n)$,

Exercice 1.
A partir des deux développements limités donnés au dessus, retrouver les développements limités (à l'ordre n quand ce n'est pas précisé) en 0 des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$,
2. $x \mapsto \ln(1-x)$,
3. $x \mapsto \ln(1+x)$,
4. DL_3, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, de $x \mapsto (1+x)^\alpha$
5. DL_{2n} de $x \mapsto \cos(x)$,
6. DL_{2n+1} de $x \mapsto \sin(x)$,
7. DL_3 de $x \mapsto \tan(x)$.

Ces développements limités font également partis de la liste de ceux à connaître par coeur.

Exercice 2.
A partir des deux développements limités donnés au dessus, trouver les développements limités en 0 des fonctions suivantes.

1. DL_{2n} de $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$.
2. DL_{2n+1} de $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$.
3. DL_3 de $x \mapsto \mathrm{th}(x)$.
4. Sachant que $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, donner un DL_5 de $x \mapsto \arcsin(x)$.
5. $x \mapsto \arctan(x)$.

Il est important de savoir retrouver rapidement ces développements limités par le calcul (au moins les premiers termes). On peut ajouter à la liste celui de arccos qui s'obtient de la même manière que celui de arcsin.

Exercice 3.
Dans la suite, quand un équivalent est demandé, on donnera le plus simple.

1. Donner le DL à l'ordre 3 de $x \mapsto e^x$ en 0.
2. Donner le DL à l'ordre 2 de $x \mapsto e^{-2x}$ en 0.
3. $\dfrac{e^{\frac{x^2}{2}}-1}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\sim}$?
4. Donner le DL à l'ordre 4 de $x \mapsto \cos(x)$ en 0.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1-\cos(\sqrt{2}x)}{x^n} \underset{x\to 0}{\sim}$?
6. Donner le DL à l'ordre 3 de $x \mapsto \sin(x)$ en 0.
7. $\sin(x)^4 - x^3 \underset{x\to 0}{\sim}$?
8. $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim}$?
9. $\sin\left(\dfrac{1}{1-x}-1\right)^2 + x^3e^{-x} + xe^x \underset{x\to 0}{\sim}$?
10. $\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{\sim}$?
11. $\ln(\tan(x)) \underset{x\to 0}{\sim}$?
12. $\ln(x)^3\left(\dfrac{1}{1+e^{-x}} - \cos(\dfrac{1}{x})\right) + e^{-2x} \underset{x\to +\infty}{\sim}$?
13. $x^3 + x^2(\ln(x))^4 \underset{x\to +\infty}{\sim}$?
14. $x^3 + x^2(\ln(x))^4 \underset{x\to 0}{\sim}$?
15. $2xe^x + x \underset{x\to 0}{\sim}$?
16. $(x-2)^2e^x - (x^5+7x^2)e^{\frac{x}{3}} \underset{x\to +\infty}{\sim}$?
17. $2^x - e^x + x^3e^{-x} \underset{x\to +\infty}{\sim}$?
18. $\ln\left(\cos(e^{-x}) + \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) - \dfrac{1}{x} \underset{x\to +\infty}{\sim}$?
19. $\dfrac{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)\ln(1+e^{-x})}{\sin(e^{-x+1})\ln\left(1-\frac{1}{(x+\sqrt{x})^2}\right)} \underset{x\to +\infty}{\sim}$?
20. Donner le signe à partir d'un certain rang de $-2^n - n^3 + (2n)!$.
21. Donner le signe à partir d'un certain rang de $n^4 - 3n^2 + (\ln(n))^9 - n^3(\ln(n))^2$.
22. $e^{-\sqrt{n}}(n+1)! \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
23. $\ln(1-\dfrac{1}{n!}) - \dfrac{1}{(2n)!} \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
24. $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
25. $\cos(\dfrac{1}{n^n}) + \dfrac{1}{(n+3)^2} \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
26. $\sin\left(\dfrac{1}{n^{n+1}}\right) + e^{-n} \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
27. $\tan\left(\dfrac{1}{n^{n+1}}\right) - \dfrac{1}{n^n} \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
28. $\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^{n^2} \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
29. $n^2e^{\frac{n}{2}} + (n-1)^3e^{\frac{n}{3}} \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
30. $(n-7)\ln(n^2+2) \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
31. $\dfrac{n-1}{3}\ln(n)^5 + (n+\sqrt{n+1}-7)^2 \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
32. $\dfrac{(n-\pi)^n}{n^n + 10^n - (3n)!} \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
33. $\dfrac{n}{1-\frac{1}{n^2}} \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
34. $\dfrac{1}{1-\frac{1}{(n-1)^3}} - \dfrac{1}{1+\frac{1}{(n+3)^2}} \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
35. $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{3n}} \underset{n\to +\infty}{\sim}$?