Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 1ère année, 2024-2025, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n°9 :
Développements limités.

Exercice 1 ⋄
Donner le développement limité en 0 des fonctions suivantes. On précisera à chaque fois le domaine de définition des fonctions impliquées et leur régularité.

1. $x \mapsto \frac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3.
2. $x \mapsto \sin(x)\cos(2x)$ à l'ordre 5.
3. $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}}{1+2x}$ à l'ordre 3.
4. $x \mapsto \frac{(\ln(1-x))^2}{x^2}$ à l'ordre 3.
5. $x \mapsto \frac{3x^2+3x+2}{1+x^2}$ à l'ordre 4.
6. $x \mapsto \frac{(\mathrm{Arctan}(x))^2}{1-x^2}$ à l'ordre 4.
7. $x \mapsto \mathrm{sh}(x^2)\,\mathrm{ch}(x)$ à l'ordre 5.

Exercice 2 ⋄
Soit f et g deux fonctions admettant des développements limités en 0. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 du produit fg dans les cas suivants.

1. $f(x) = 1 + x^2 + x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ et $g(x) = 1 + 2x + 4x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.
2. $f(x) = x + 2x^2 + x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ et $g(x) = 1 - x + 3x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

Exercice 3 ⋄
On considère la fonction $f : x \in]-\infty, 1[\mapsto \frac{x^3}{1-x}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier que la fonction est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$.
2. Écrire le développement limité d'ordre n de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ en 0.
3. En déduire le développement limité d'ordre $(n+3)$ de f en 0.
4. En déduire la valeur de $f^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 ⋄
1. Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ peut être prolongée par continuité à $\mathbb{R}$.
2. Écrire le développement limité de sin à l'ordre 5 en 0, et en déduire un développement limité à l'ordre 4 de f en 0.
3. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Peut-on conclure de la même façon que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$?
4. Trouver un équivalent quand $x \to 0$ de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} - \cos(x/\sqrt{3})$.

Exercice 5 ⋄
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dont des développements limités en 0 sont donnés par $f(x) = x + 2x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ et $g(x) = 1 + x + 3x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. Donner un développement limité de $g \circ f$ à l'ordre 2 en 0.

Exercice 6 ⋄
1. Rappeler le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0, à l'ordre 4, et le développement limité de $x \mapsto \cos(x)$ en 0, à l'ordre 4.
2. En déduire le développement limité de $f : x \mapsto \ln(\cos(x))$ en 0 à l'ordre 4. On donnera au préalable le plus grand intervalle I contenant 0 sur lequel f est définie et on précisera sa régularité.

Exercice 7 ⋄
Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. On justifiera par une preuve ou un contre-exemple ?

1. Si f est dérivable en 0 et si f' admet un développement limité d'ordre $k \geqslant 0$ en 0, alors f admet un développement limité d'ordre $k+1$ en 0.

2. Si f admet un développement limité d'ordre $k \geqslant 1$ en 0, alors f' admet un développement limité d'ordre $k-1$ en 0.

3. Si f et g admettent un développement limité d'ordre n en 0, alors $g \circ f$ aussi.

4. Si f possède un développement limité en a à l'ordre n, alors f possède un développement limité en a à l'ordre k pour tout $k \leqslant n$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $f \in \mathcal{C}^n([-1,1],\mathbb{R})$, alors $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$.

6. La fonction f est dérivable en 0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0.

7. La fonction f est deux fois dérivable en 0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

Exercice 8 ◇

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dont les développements limités en 0 sont donnés par $f(x) = 1 + x + 2x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$ et $g(x) = 1 + 3x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$. En déduire les développements limités à l'ordre 2 en 0 de $\frac{1}{f}$ puis de $\frac{g}{f}$.

Exercice 9 ◇

1. Calculer le développement limité de $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{1-x^2+x^4}$ en 0 à l'ordre 3. On précisera au préalable le domaine de définition de f.

2. En déduire le développement limité de $g : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{1-x^2+x^4}}$ en 0 à l'ordre 3. On précisera au préalable le domaine de définition de g.

Exercice 10 ◇

Déterminer les limites suivantes, lorsqu'elles existent :

1. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x + \ln(1-x) - 1}{\mathrm{sh}(x) - \mathrm{Arcsin}(x)}$.
2. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x\ln(x)}$.
3. $\displaystyle \lim_{x \to \frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1)\tan(\pi x)$.

Exercice 11 ◇

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \ln(x^2 + 2x + 2)$.

1. Effectuer un développement limité de f en 0, à l'ordre 3.

2. En déduire l'équation de la tangente au graphe de f au point de coordonnées $(0, f(0))$.

3. Étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point. Que peut-on dire du point de coordonnées $(0, f(0))$?

Exercice 12 ◇

Pour $x > 0$, trouver un développement asymptotique à 3 termes quand $n \to +\infty$ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = (1 + \frac{x}{n})^n$.

Exercice 13

Calculer les développements limités en 0 de :

1. $x \mapsto \frac{3x+1}{2+3x+x^2}$ à l'ordre 2,
2. $x \mapsto e^{\sin(x)}$ à l'ordre 4,
3. $x \mapsto \ln(4 - 8x + x^2)$ à l'ordre 4.

Exercice 14

Déterminer les limites suivantes, lorsqu'elles existent.

1. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}$.
2. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\cos\left(x - 1 - \ln(1 - x^2/2)\right)}{x^4}$.
3. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1 + \sin^2(x)}{x^2}$.

Exercice 15

Soit $f : x \mapsto \frac{1-\sin(x)/x}{1-\cos(x)}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?

2. Donner le développement limité de f en 0, à l'ordre 2.

3. Calculer la limite de f en 0. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 16

Si une fonction est n fois dérivable en 0, alors elle admet un développement limité à l'ordre n en 0. Nous allons montrer que la réciproque est fausse. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^3 \sin(1/x^2), & x \neq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f n'est pas deux fois dérivable en 0.
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant |x|^3$. En déduire que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

Exercice 17 ♣

Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n$ pour tous $a, b > 0$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\ln(1+kx)}$, en discutant selon les valeurs de $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{R}$.

Exercice 18 ♣ (Comportement asymptotique du sinus itéré)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$.
2. Montrer que u converge vers 0.
3. À l'aide d'un développement limité, déterminer $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2})$. En déduire la limite de la suite $v = \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$. *Indication : utiliser le lemme de Cesaro [feuille de TD n° 3] : si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ converge aussi vers ℓ..*