Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 1ère année, 2024-2025, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n°8 :
Fonctions usuelles.

Exercice 1 ⋄
Calculer les quantités suivantes.

1. $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$.
2. $\arctan\left(\sqrt{3}\right)$.
3. $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$.
4. $\arccos\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$.
5. $\arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)$.

Exercice 2 ⋄
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes (on précisera leurs domaines de validité).

1. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.
2. $\sin x = \frac{1}{3}$.
3. $\cos x = \frac{\pi}{4}$.
4. $\tan x = 1$.
5. $\arcsin x = \arcsin\frac{2}{5} + \arcsin\frac{3}{5}$.

Exercice 3 ⋄
Démontrer les identités suivantes (on précisera leurs domaines de validité).

1. $x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}} = \ln(x)$.
2. $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
3. $\arctan(2\sqrt{2}) + 2\arctan(\sqrt{2}) = \pi$.
4. $\frac{\sin(x+y+z)}{\cos(x)\cos(y)\cos(z)} = \tan(x) + \tan(y) + \tan(z) - \tan(x)\tan(y)\tan(z)$.

Exercice 4 ⋄
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes (on précisera leurs domaines de validité).

1. $\mathrm{sh}(x) = 2$.
2. $\mathrm{th}(x) = 3$.
3. $\mathrm{ch}(x) = 1$.

Exercice 5 ⋄
Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}(\mathrm{ch}(x)^3 - \mathrm{sh}(x)^3)$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln(\mathrm{ch}(x)))$.

Exercice 6 ⋄
Démontrer les inégalités suivantes pour tout $x \geqslant 0$:

1. $\mathrm{sh}(x) \geqslant x$,
2. $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}$,
3. $\mathrm{sh}(x) \geqslant x + \frac{x^3}{6}$.

Exercice 7 ⋄
Démontrer de deux façons différentes que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x+y)\,\mathrm{ch}(x-y) = \mathrm{ch}(x)^2 + \mathrm{sh}(y)^2.$$

Exercice 8
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx) = \frac{\mathrm{ch}\left(\frac{nx}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Exercice 9
1. Montrer que pour tout $x \neq 0$, $\mathrm{th}(x) = \dfrac{2}{\mathrm{th}(2x)} - \dfrac{1}{\mathrm{th}(x)}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \operatorname{th}(2^k x)$. Étudier la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10 ♣

Démontrer les identités suivantes (on précisera leurs domaines de validité).

1. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{2}{\cos(2x)}$.
2. $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
3. $\operatorname{Argth}(\sin(2x)) = 2\operatorname{Argth}(\tan(x))$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)}\right)^n = \frac{1+\operatorname{th}(nx)}{1-\operatorname{th}(nx)}$.

Exercice 11 ♣ (Formule de Machin)

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ est un argument de z. Comment faut-il corriger la formule si $x < 0$?
2. Montrer que $(3+i)^2(7+i) = 50(1+i)$.
3. En déduire que $\frac{\pi}{4} = 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$.
4. Montrer selon le même principe la formule de John Machin [1] :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

1. John Machin a été le premier mathématicien, en 1706, a calculé les 100 premières décimales du nombre π grâce à cette formule. Voir `https://en.wikipedia.org/wiki/John_Machin` et `https://en.wikipedia.org/wiki/Machin-like_formula`